OSNOVE MODELIRANJA

➢Matematični model

▪ osno obremenjeni konstrukcijski element

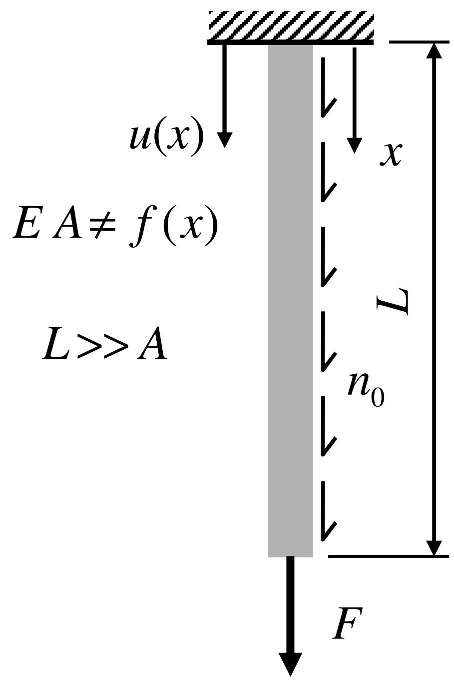
• diferencialna enačba problema:

$$E\,A\,\frac{d^2u}{dx^2} = -n_0$$

• robni pogoji:

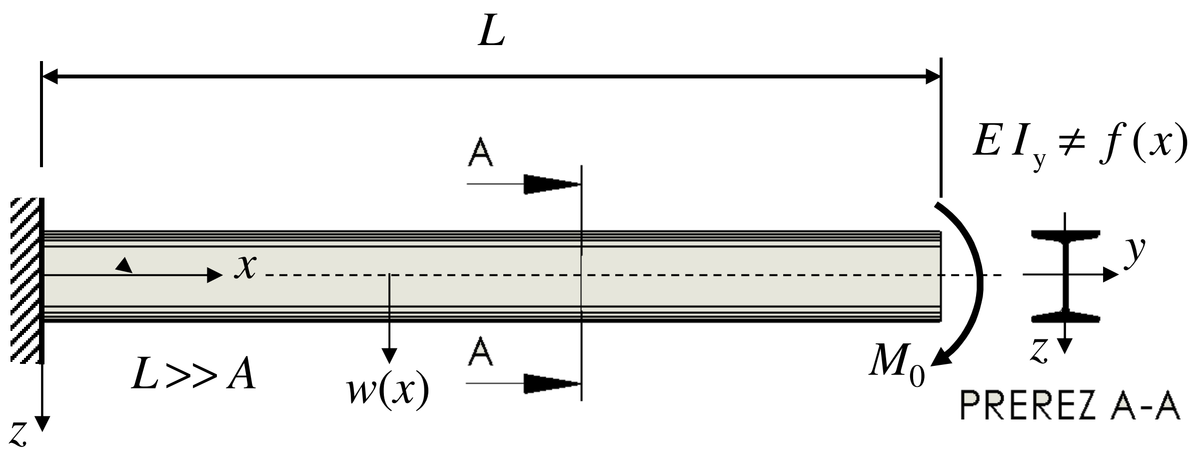
$$u(x=0)=0$$

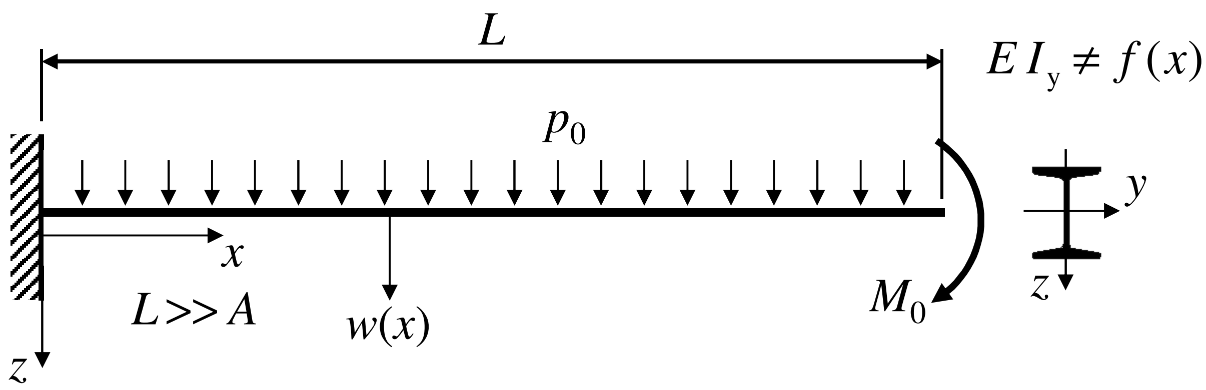
$$N(x=L) = E\,A\,\frac{du}{dx}(x=L) = F$$



➢Matematični model

- upogibno obremenjeni konstrukcijski element





• diferencialna enačba problema:

$$E\,I_y \,\frac{d^4 w}{dx^4} = p_0$$

• robni pogoji:

$$w(x=0)=0$$

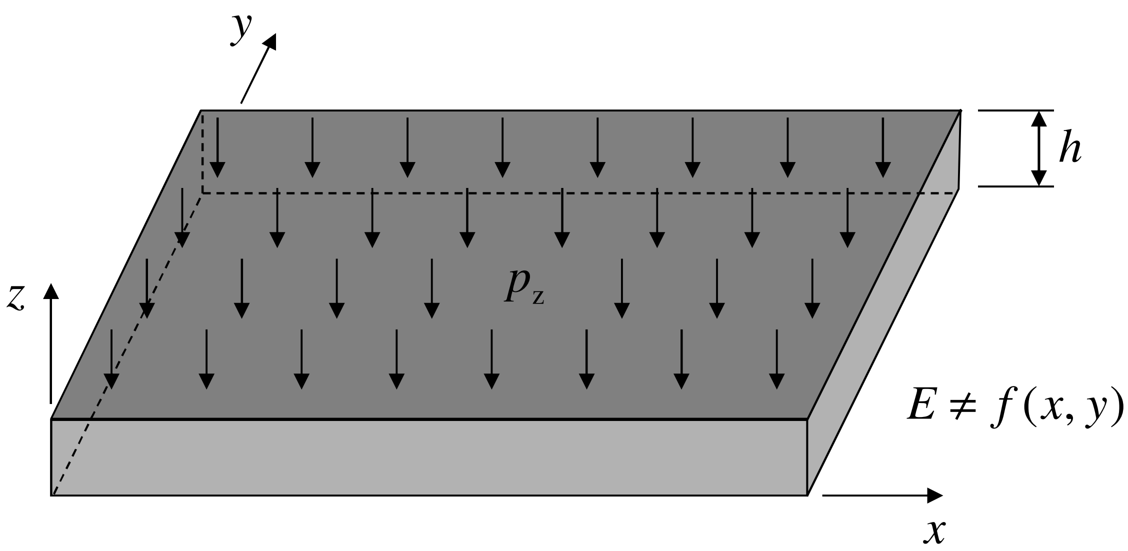
$$\varphi(x=0)=\frac{dw}{dx}(x=0)=0$$

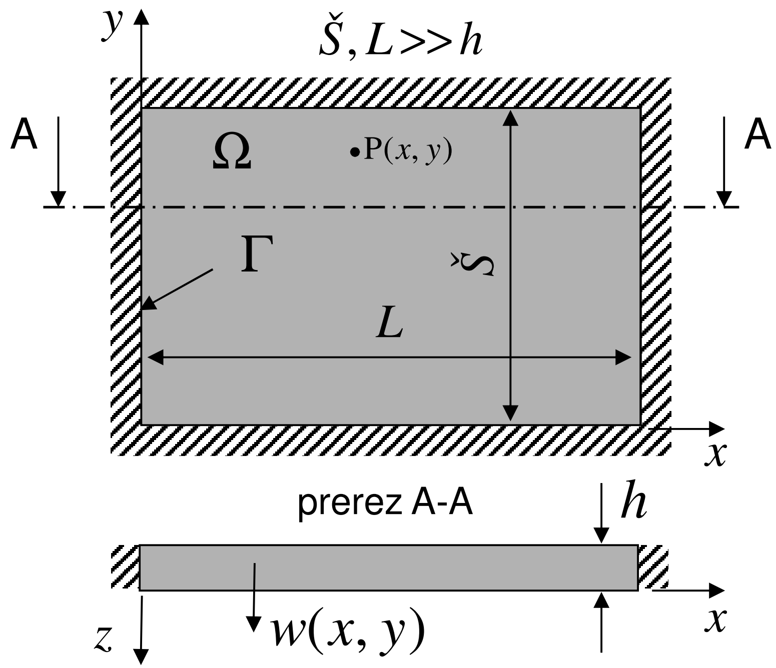
$$M(x=L)=-E\,I_y\,\frac{d^2 w}{dx^2}(x=L)=-M_0$$

$$T(x=L)=-E\,I_y\,\frac{d^3 w}{dx^3}(x=L)=0$$

➢Matematični model

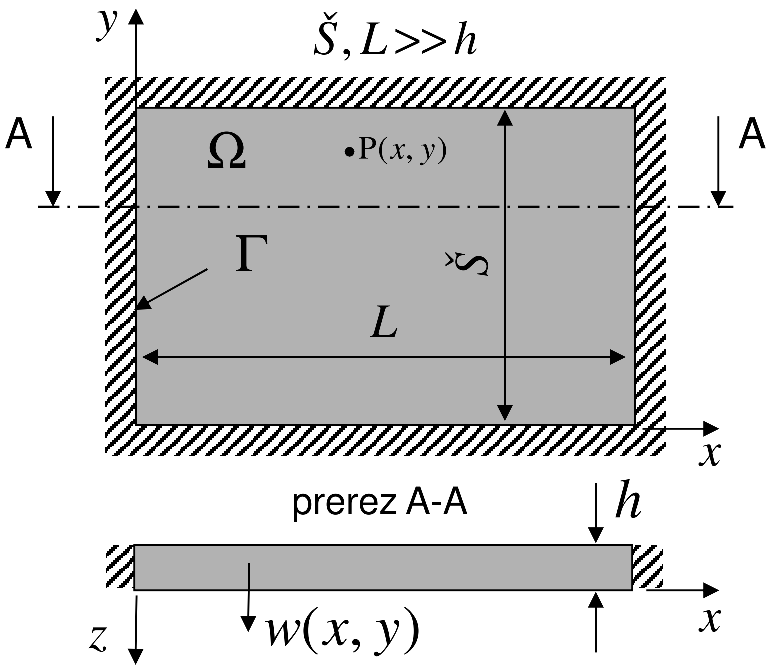
- upogibno obremenjena plošča, konzolno vpeta po robovih





• diferencialna enačba problema:

$$\frac{E\,h^3}{12\,(1-\nu^2)}\left(\frac{\partial^4 w(x,y)}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 w(x,y)}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 w(x,y)}{\partial y^4}\right)=p_z$$



• robni pogoji:

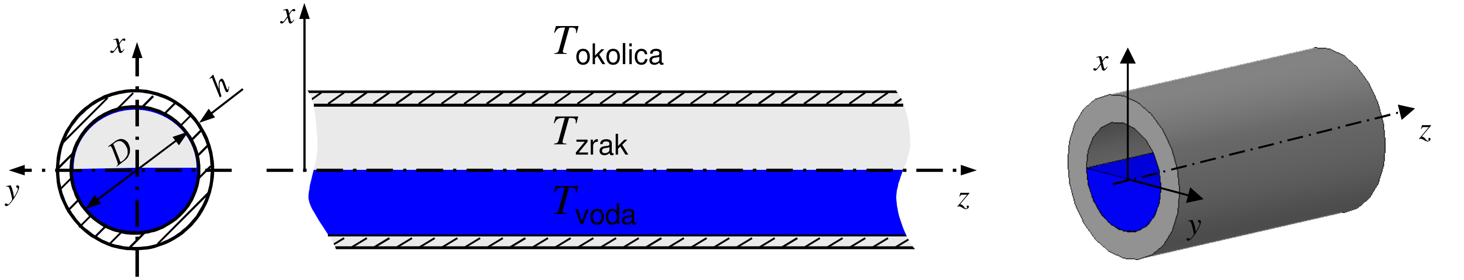
$$P(x, y) \in \Gamma$$

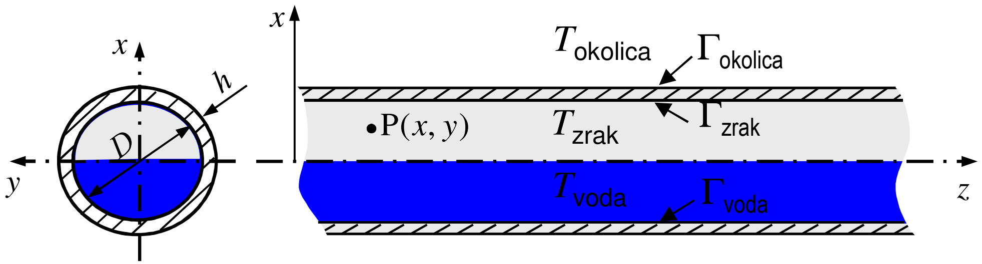
$$w(x=0, y) = 0$$
$$w(x=L, y) = 0$$
$$w(x, y=0) = 0$$
$$w(x, y=\check{S}) = 0$$

$$\varphi_{\mathrm{y}}(x=0, y) = \frac{\partial w}{\partial x}(x=0, y) = 0$$
$$\varphi_{\mathrm{y}}(x=L, y) = \frac{\partial w}{\partial x}(x=L, y) = 0$$
$$\varphi_{\mathrm{x}}(x, y=0) = \frac{\partial w}{\partial y}(x, y=0) = 0$$
$$\varphi_{\mathrm{x}}(x, y=\check{S}) = \frac{\partial w}{\partial y}(x, y=\check{S}) = 0$$

➢Matematični model

- ustaljeni prevod toplote skozi steno dolge cevi





• diferencialna enačba problema:

$$\frac{\partial^2 T(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T(x,y)}{\partial y^2} = 0$$

• robni pogoji:

$$q_{\text{voda}}(x,y) = h_{\text{voda}}(T - T_{\text{voda}}) \;,\;\; \mathrm{P}(x,y) \in \Gamma_{\text{voda}}$$
$$q_{\text{zrak}}(x,y) = h_{\text{zrak}}(T - T_{\text{zrak}}) \;,\;\; \mathrm{P}(x,y) \in \Gamma_{\text{zrak}}$$
$$q_{\text{okolica}}(x,y) = h_{\text{zrak}}(T - T_{\text{okolica}}) \;,\;\; \mathrm{P}(x,y) \in \Gamma_{\text{okolica}}$$

OSNOVE MODELIRANJA

➢Numerični model

- ➢ eksaktno reševanje:
  - reševanje diferencialnih enačb
- ➢ aproksimativno reševanje:
  - metoda končnih razlik (**MKR**) – finite difference method (**FDM**)
  - metoda končnih elementov (**MKE**) – finite element method (**FEM**)
  - metoda robnih elementov (**MRE**) – boundary element method (**BEM**)

➢Numerični model

▪ primer eksaktnega reševanja:

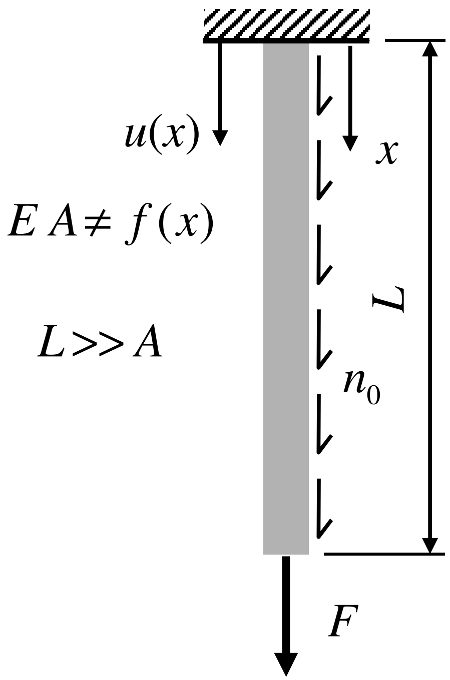
• diferencialna enačba problema:

$$E\,A\,\frac{d^2u(x)}{dx^2} = -n_0$$

• robni pogoji:

$$u(x=0)=0$$

$$N(x=L)=F$$

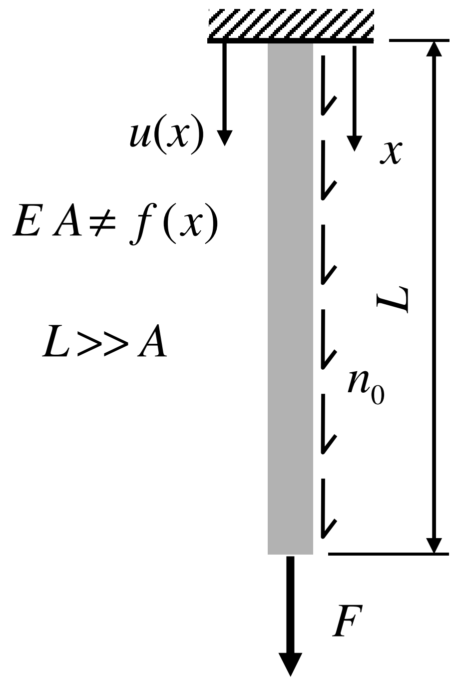


- reševanje diferencialne enačbe z integriranjem:

$$E\,A\,\frac{d^2u(x)}{dx^2} = -n_0$$

$$\frac{d^2u(x)}{dx^2} = -\frac{n_0}{E\,A} = K$$

$$u(x) = K\,\frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2$$



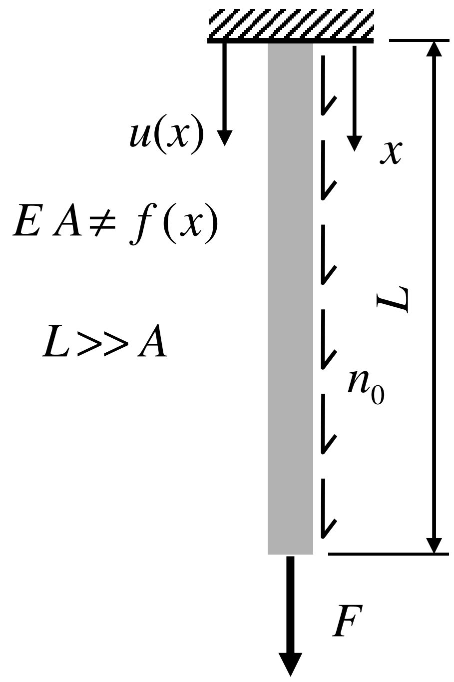
- izračun neznanih konstant C_1 in C_2 upoštevajoč robne pogoje:

$$1)\ u(x=0) = K\frac{0^2}{2} + C_1\, 0 + C_2 = 0$$

$$2)\ N(x=L) = E\,A\frac{du}{dx}\left(x=L\right) =$$

$$= E\,A\left[\,K\,L + C_1\,\right] = F$$

$$C_1 = \frac{F}{E\,A} - K\,L \quad , \quad C_2 = 0$$



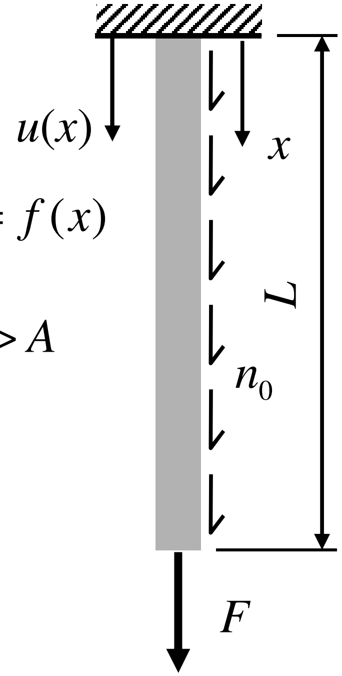
• eksaktna rešitev:

$$u(x) = \frac{-n_0}{E\,A}\frac{x^2}{2} + \left[\frac{F}{E\,A} + \frac{n_0\,L}{E\,A}\right]x$$

$$N(x) = E\,A\frac{du}{dx}(x) = F + n_0\,(L - x)$$

$E\,A \neq f\,(x)$

$L >> A$



OSNOVE MODELIRANJA

➢Numerični model

➢ <u>aproksimativno reševanje</u>:

- ko eksaktno rešitev diferencialne enačbe ni mogoče določiti
- aproksimativno reševanje prevede reševanje diferencialne enačbe v reševanje sistema enačb
- pri izbiri aproksimativne metode upoštevamo značilnosti fizikalnega modela
- pri izbiri aproksimativne metode moramo upoštevati prednosti in slabosti posamezne numerične metode

OSNOVE MODELIRANJA

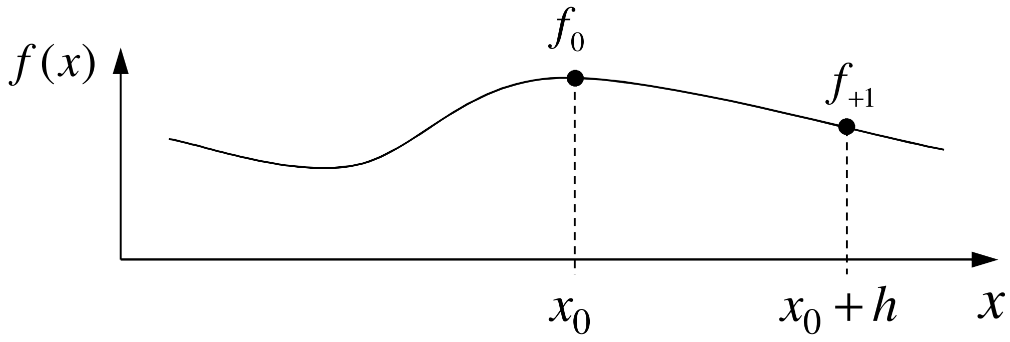
➢Numerični model

- ➢ aproksimativno reševanje:
  - metoda končnih razlik (**MKR**):
    - osnovna ideja te metode je v tem, da aproksimiramo odvode funkcijskih vrednosti, ki nastopajo v diferencialni enačbi in robnih pogojih
    - aproksimacija odvodov je zasnovana na razvoju funkcije v Taylorjevo vrsto

- primer aproksimativnega izračuna prvega in drugega odvoda funkcije

  - razvoj funkcije v neskončno Taylorjevo vrsto:

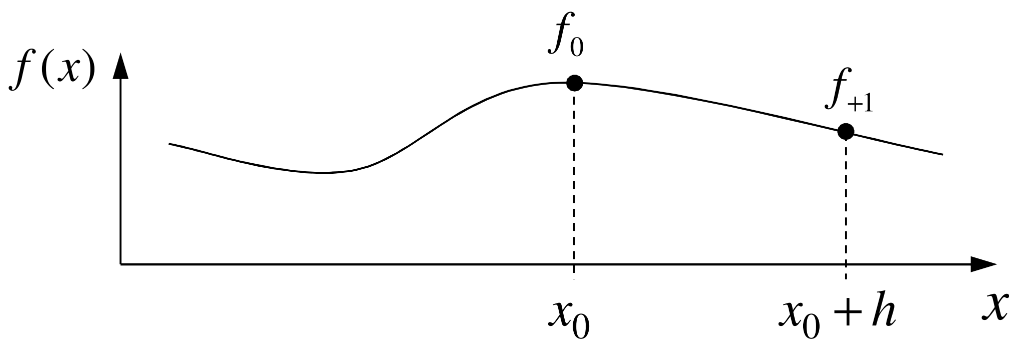
$$f(x_0+h) = f(x_0) + \frac{h}{1!}\frac{d^1 f}{dx^1}(x_0) + \frac{h^2}{2!}\frac{d^2 f}{dx^2}(x_0) + \frac{h^3}{3!}\frac{d^3 f}{dx^3}(x_0) + \ldots$$



• aproksimacija vrednosti funkcije:

$$f(x_0+h) \approx f(x_0) + \frac{h}{1!}\frac{d^1 f}{dx^1}(x_0) + \frac{h^2}{2!}\frac{d^2 f}{dx^2}(x_0)$$

$$f_{+1} \approx f_0 + h\, f_0' + \frac{h^2}{2}\, f_0''$$

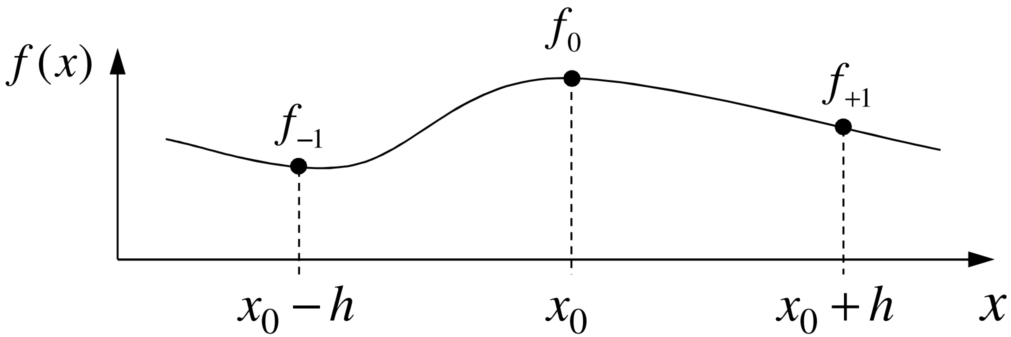


• aproksimacija prvega in drugega odvoda funkcije:

$$f_{+1} \approx f_0 + h\, f_0' + \frac{h^2}{2}\, f_0''$$

$$f_{-1} \approx f_0 - h\, f_0' + \frac{h^2}{2}\, f_0''$$

$$\boxed{f_0' \approx \frac{f_{+1} - f_{-1}}{2h}} \qquad \boxed{f_0'' \approx \frac{f_{+1} - 2 f_0 + f_{-1}}{h^2}}$$



- primer aproksimativnega reševanja z **MKR**:

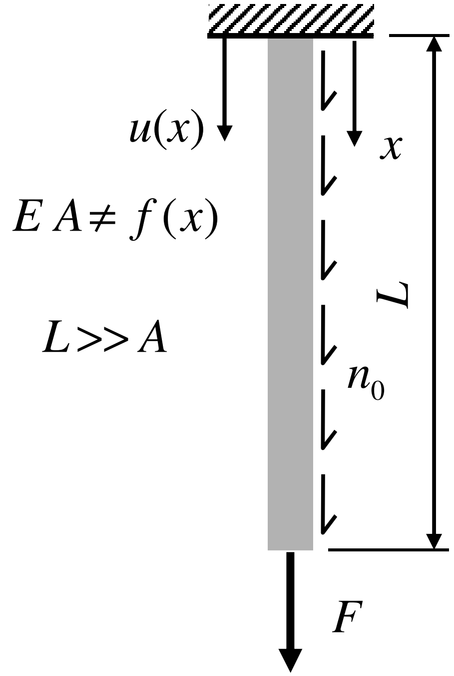
  - diferencialna enačba problema:

$$E\,A\,\frac{d^2u(x)}{dx^2} = -n_0$$

  - robni pogoji:

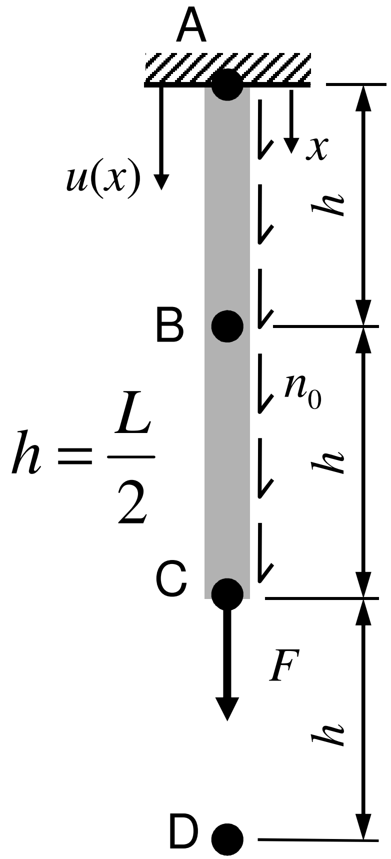
$$u(x=0)=0$$

$$N(x=L) = E\,A\,\frac{du}{dx}\left(x=L\right) = F$$



• diferencialna enačba problema zapisana v diferenčni obliki:

$$E\,A\left(\frac{u_{+1}-2u_0+u_{-1}}{h^2}\right)=-n_0$$



• zapis robnih pogojev:

$$u(x=0)=u_{\mathrm{A}}=0$$

$$N(x=L)=E\,A\frac{du}{dx}(x=L)$$

$$=E\,A\frac{u_{\mathrm{D}}-u_{\mathrm{B}}}{2\,h}=F$$

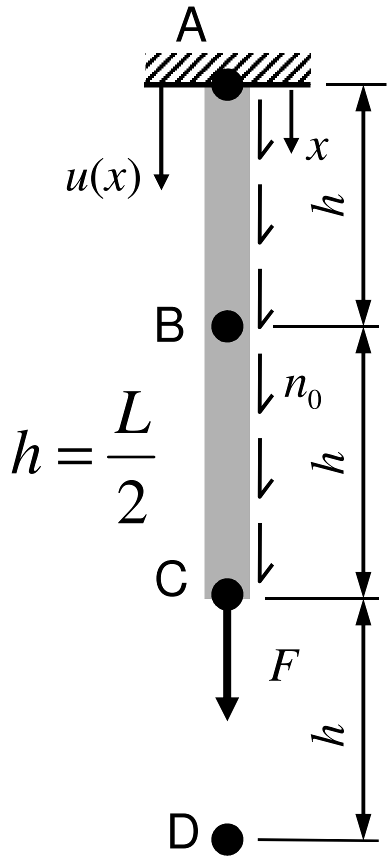
• zapis sistema enačb:

$$u_{\mathrm{A}} = 0$$

$$E\,A\left(\frac{u_{\mathrm{D}} - u_{\mathrm{B}}}{2\,h}\right) = F$$

$$E\,A\left(\frac{u_{\mathrm{A}} - 2u_{\mathrm{B}} + u_{\mathrm{C}}}{h^2}\right) = -n_0$$

$$E\,A\left(\frac{u_{\mathrm{B}} - 2u_{\mathrm{C}} + u_{\mathrm{D}}}{h^2}\right) = -n_0$$



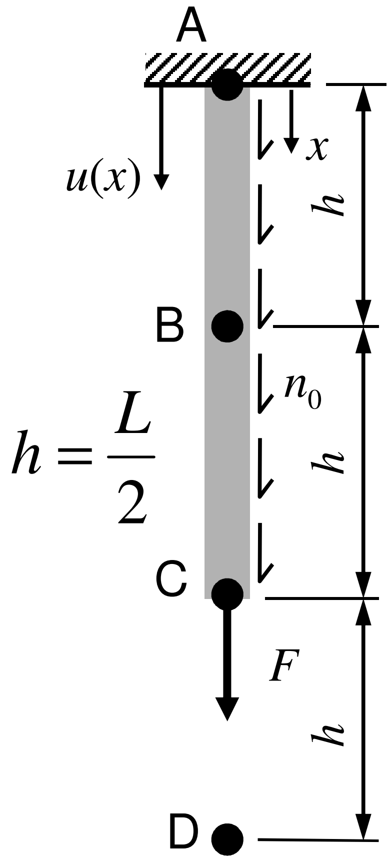
- rešitev sistema enačb:

$$u_A = 0$$

$$u_B = \frac{L}{EA}\left(\frac{F}{2} + \frac{3 n_0 L}{8}\right)$$

$$u_C = \frac{L}{EA}\left(F + \frac{n_0 L}{2}\right)$$

$$u_D = \frac{L}{EA}\left(\frac{3F}{2} + \frac{3 n_0 L}{8}\right)$$



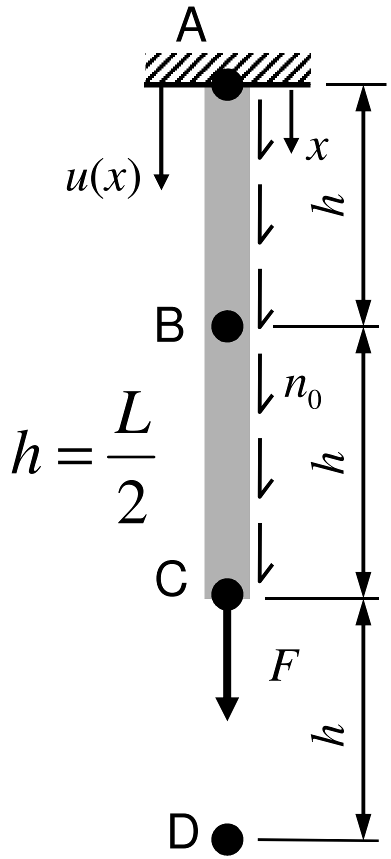
• izračun notranje osne sile v točki B:

$$N_{\mathrm{B}} = E\,A\left(\frac{du}{dx}\left(x=\frac{L}{2}\right)\right)=$$

$$= E\,A\left(\frac{u_{\mathrm{C}}-u_{\mathrm{A}}}{2\,h}\right)=$$

$$= E\,A\left[\frac{\left(\dfrac{L}{E\,A}\left(F+\dfrac{n_0\,L}{2}\right)-0\right)}{2\left(\dfrac{L}{2}\right)}\right]=$$

$$= F+\frac{n_0\,L}{2}$$



➢Numerični model

- značilnosti aproksimativnega reševanja z **MKR**:
  - prednosti:
    - enostavna uporaba
  - slabosti:
    - zahtevna priprava mreže točk, še posebno v 3D prostoru