OSNOVE MODELIRANJA

➢Numerični model

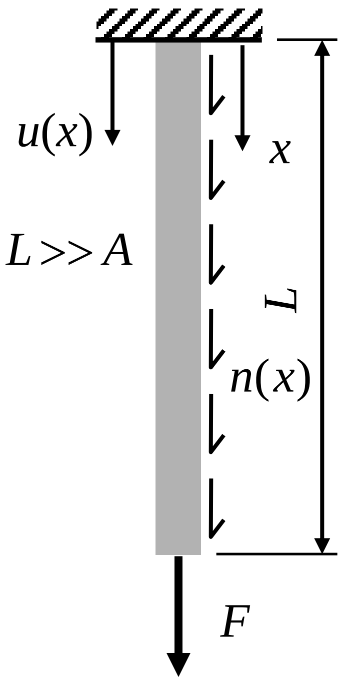
➢ aproksimativno reševanje:

- metoda končnih elementov (**MKE**):
  - metoda je zasnovana na integralski formulaciji problema
  - izhodiščna integralska enačba MKE je šibka oblika integralske enačbe
  - obravnavano območje problema razdelimo na podobmočja, imenovana končni element (**KE**)
  - v območju KE aproksimiramo neznane veličine

- osno obremenjeni konstrukcijski element

  - diferencialna enačba problema:

$$\frac{d}{dx}\left(E\,A(x)\,\frac{du}{dx}\right)=-n(x)$$



  - prevedba diferencialne enačbe v integralsko enačbo

$$\frac{d}{dx}\left(E\,A(x)\,\frac{du}{dx}\right)+n(x)=0$$

$$\int_0^L\left[\frac{d}{dx}\left(E\,A(x)\,\frac{du}{dx}\right)+n(x)\right]v(x)\;dx=0$$

• prevedba osnovne integralske enačbe v šibko obliko integralske enačbe:

osnovna integralska enačba

$$\int_0^L \left[\frac{d}{dx} \left(E\,A(x)\,\frac{du}{dx} \right) \right] v(x)\,dx = -\int_0^L n(x)\,v(x)\,dx$$

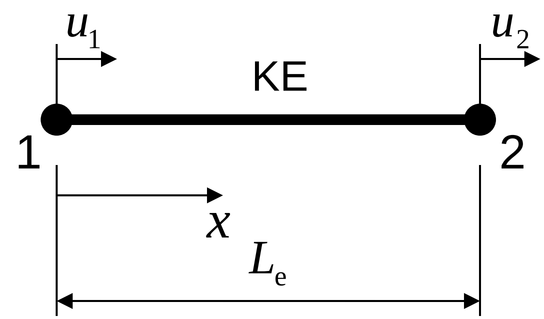
s *per partes* integracijo leve strani osnovne integralske enačbe dobimo šibko obliko integralske enačbe

$$\int_0^L \left(E\,A(x)\,\frac{du}{dx} \right) \left(\frac{dv}{dx} \right) dx =$$

$$= E\,A(L)\frac{du}{dx}(L)\;v(L) - E\,A(0)\frac{du}{dx}(0)\;v(0) + \int_0^L n(x)\,v(x)\,dx =$$

$$= N(L)\,v(L) - N(0)\,v(0) + \int_0^L n(x)\,v(x)\,dx$$

• interpolacija pomika v območju dvo-vozliščnega enodimenzijskega KE ($0 \le x \le L_\mathrm{e}$):



$$u(x) \approx \hat{u}(x) = u_1\,\psi_1(x) + u_2\,\psi_2(x)$$

$$\hat{u}(0) = u_1 \quad \Rightarrow \quad \psi_1(0) = 1 \;\wedge\; \psi_1(L_\mathrm{e}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \psi_1(x) = 1 - \frac{x}{L_\mathrm{e}}$$

$$\hat{u}(L_\mathrm{e}) = u_2 \Rightarrow \quad \psi_2(0) = 0 \;\wedge\; \psi_1(L_\mathrm{e}) = 1 \;\Rightarrow\; \psi_2(x) = \frac{x}{L_\mathrm{e}}$$

$$\hat{u}(x) = u_1\left(1 - \frac{x}{L_\mathrm{e}}\right) + u_2\left(\frac{x}{L_\mathrm{e}}\right)$$

• upoštevanje interpolacije pomika po območju KE v šibki obliki integralske enačbe:

$$\frac{du}{dx} \approx \frac{d\hat{u}}{dx} = u_1 \; \frac{-1}{L_\mathrm{e}} + u_2 \; \frac{1}{L_\mathrm{e}}$$

$$\int_0^{L_\mathrm{e}} \left[E\,A(x) \left(\frac{du}{dx} \right) \right] \left(\frac{dv}{dx} \right) dx =$$

$$= \int_0^{L_\mathrm{e}} \left[E\,A(x) \left(u_1 \; \frac{-1}{L_\mathrm{e}} + u_2 \; \frac{1}{L_\mathrm{e}} \right) \right] \left(\frac{dv}{dx} \right) dx =$$

$$= N_2\, v(L) - N_1\, v(0) + \int_0^{L_\mathrm{e}} n(x)\; v(x)\, dx$$

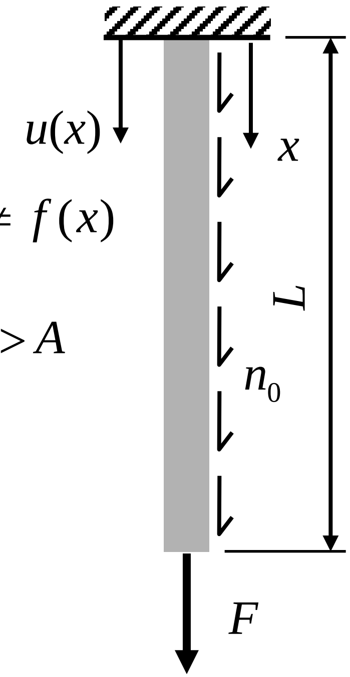
- primer aproksimativnega reševanja z **MKE**:

  - diferencialna enačba problema:

$$E\,A\,\frac{d^2u(x)}{dx^2} = -n_0$$

$E\,A \neq f(x)$

$L >> A$



  - robni pogoji:

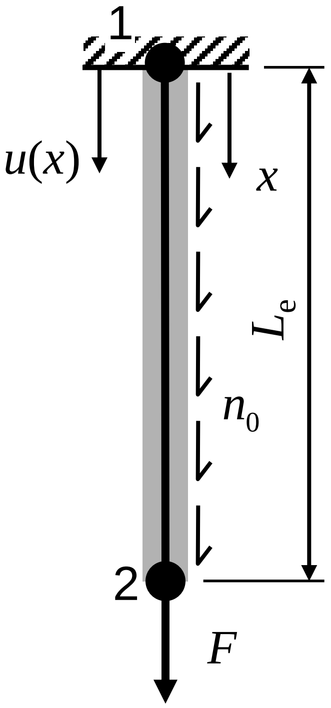
$$u(x=0)=0$$

$$N(x=L) = E\,A\,\frac{du}{dx}\big(x=L\big) = F$$

• zapis robnih pogojev:

$$u(x=0)=u_1=0$$

$$N(x=L)=N_2=F$$



• upoštevanje robnih pogojev v integralski enačbi:

$$\frac{E\,A}{L_e}\int_0^{L_e}(-u_1+u_2)\left(\frac{dv}{dx}\right)dx=$$

$$=N_2\,v(L)-N_1\,v(0)+\int_0^{L_e}n_0\;v(x)\,dx$$

$$\frac{E\,A}{L_e}\int_0^{L_e}u_2\left(\frac{dv}{dx}\right)dx=F\,v(L)-N_1\,v(0)+\int_0^{L_e}n_0\;v(x)\,dx$$

• za izračun pomika u_2 in notranje sile N_1 potrebujemo dve enačbi, ki jih dobimo na sledeči način:

1. enačba:

$$v(x) = \psi_1(x) = 1 - \frac{x}{L_\mathrm{e}} \qquad \frac{dv}{dx} = -\frac{1}{L_\mathrm{e}}$$

$$\frac{E\,A}{L_\mathrm{e}} \int_0^{L_\mathrm{e}} u_2 \left(-\frac{1}{L_\mathrm{e}} \right) dx = -N_1 + \int_0^{L_\mathrm{e}} n_0 \left(1 - \frac{x}{L_\mathrm{e}} \right) dx$$

2. enačba:

$$v(x) = \psi_2(x) = \frac{x}{L_\mathrm{e}} \qquad \frac{dv}{dx} = \frac{1}{L_\mathrm{e}}$$

$$\frac{E\,A}{L_\mathrm{e}} \int_0^{L_\mathrm{e}} u_2 \left(\frac{1}{L_\mathrm{e}} \right) dx = F + \int_0^{L_\mathrm{e}} n_0 \left(\frac{x}{L_\mathrm{e}} \right) dx$$

- izračun integralov v enačbi:

1. enačba:

$$-\frac{E\,Au_2}{L_e^2}\int_0^{L_e} dx = -N_1 + n_0\int_0^{L_e}\left(1-\frac{x}{L_e}\right)dx$$

$$-\frac{E\,Au_2}{L_e} = -N_1 + \frac{n_0\,L_e}{2}$$

2. enačba:

$$\frac{E\,Au_2}{L_e^2}\int_0^{L_e} dx = F + n_0\int_0^{L_e}\left(\frac{x}{L_e}\right)dx$$

$$\frac{E\,Au_2}{L_e} = F + \frac{n_0\,L_e}{2}$$

• izračun pomika u_2 in notranje sile N_1 :

$$\frac{E\,A u_2}{L_e} = F + \frac{n_0\,L_e}{2} \;\Rightarrow\; u_2 = \frac{L_e}{E\,A}\left(F + \frac{n_0\,L_e}{2}\right)$$

$$-\frac{E\,A u_2}{L_e} = -N_1 + \frac{n_0\,L_e}{2} \;\Rightarrow\; N_1 = \frac{E\,A u_2}{L_e} + \frac{n_0\,L_e}{2}$$

$$N_1 = \frac{E\,A\left[\dfrac{L_e}{E\,A}\left(F + \dfrac{n_0\,L_e}{2}\right)\right]}{L_e} + \frac{n_0\,L_e}{2}$$

$$N_1 = F + n_0\,L_e$$

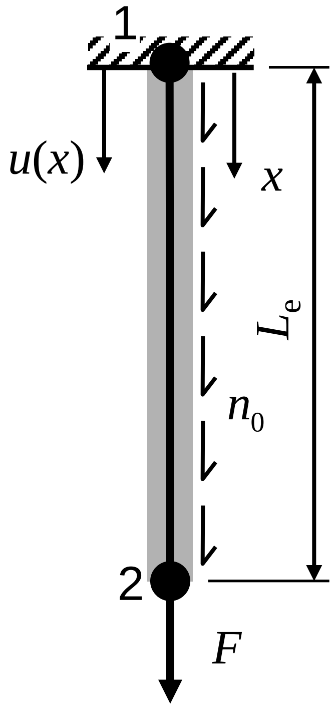
• vozliščne vrednosti:

$$u_1 = 0$$

$$u_2 = \frac{L_e}{E\,A}\left(F + \frac{n_0\,L_e}{2}\right)$$

$$N_1 = F + n_0\,L_e$$

$$N_2 = F$$



➢Numerični model

- značilnosti aproksimativnega reševanja z **MKE**:
  - <u>prednosti</u>:
    - možnost obravnave geometrijsko zahtevnih problemov
    - uporabna za reševanje vseh vrst fizikalnih problemov
  - <u>slabosti</u>:
    - računsko intenzivna metoda