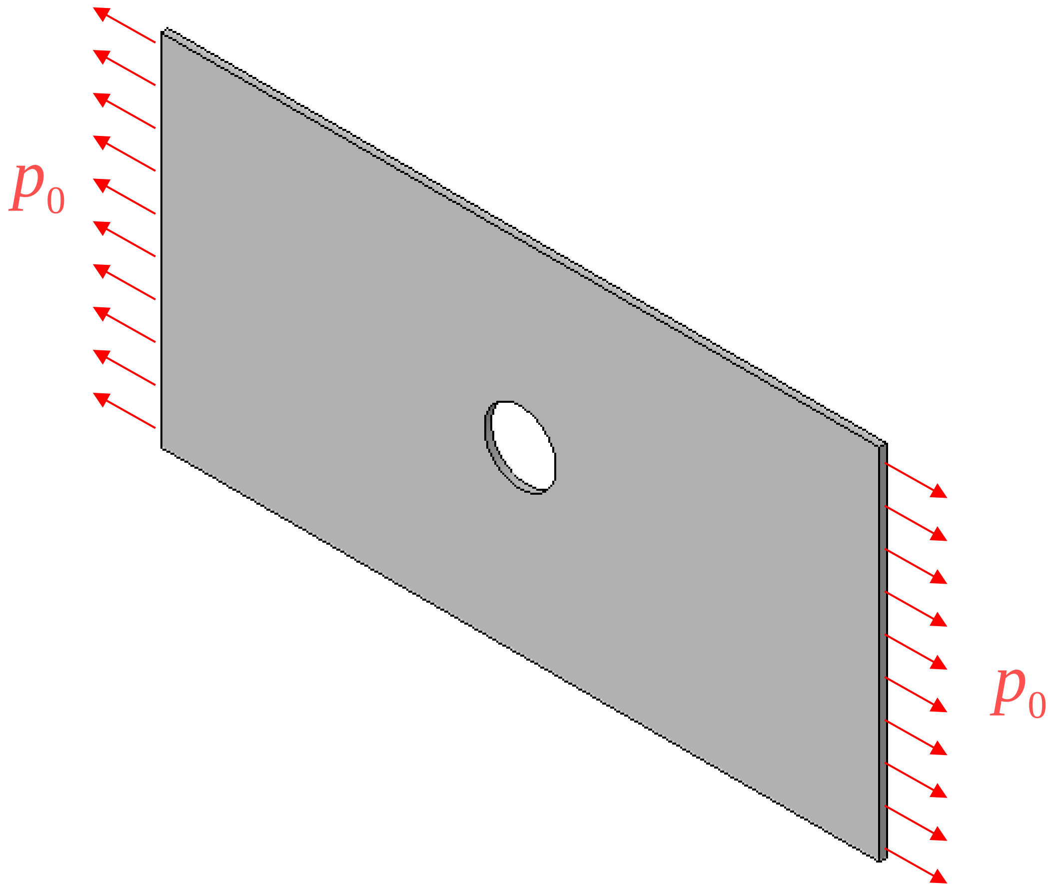
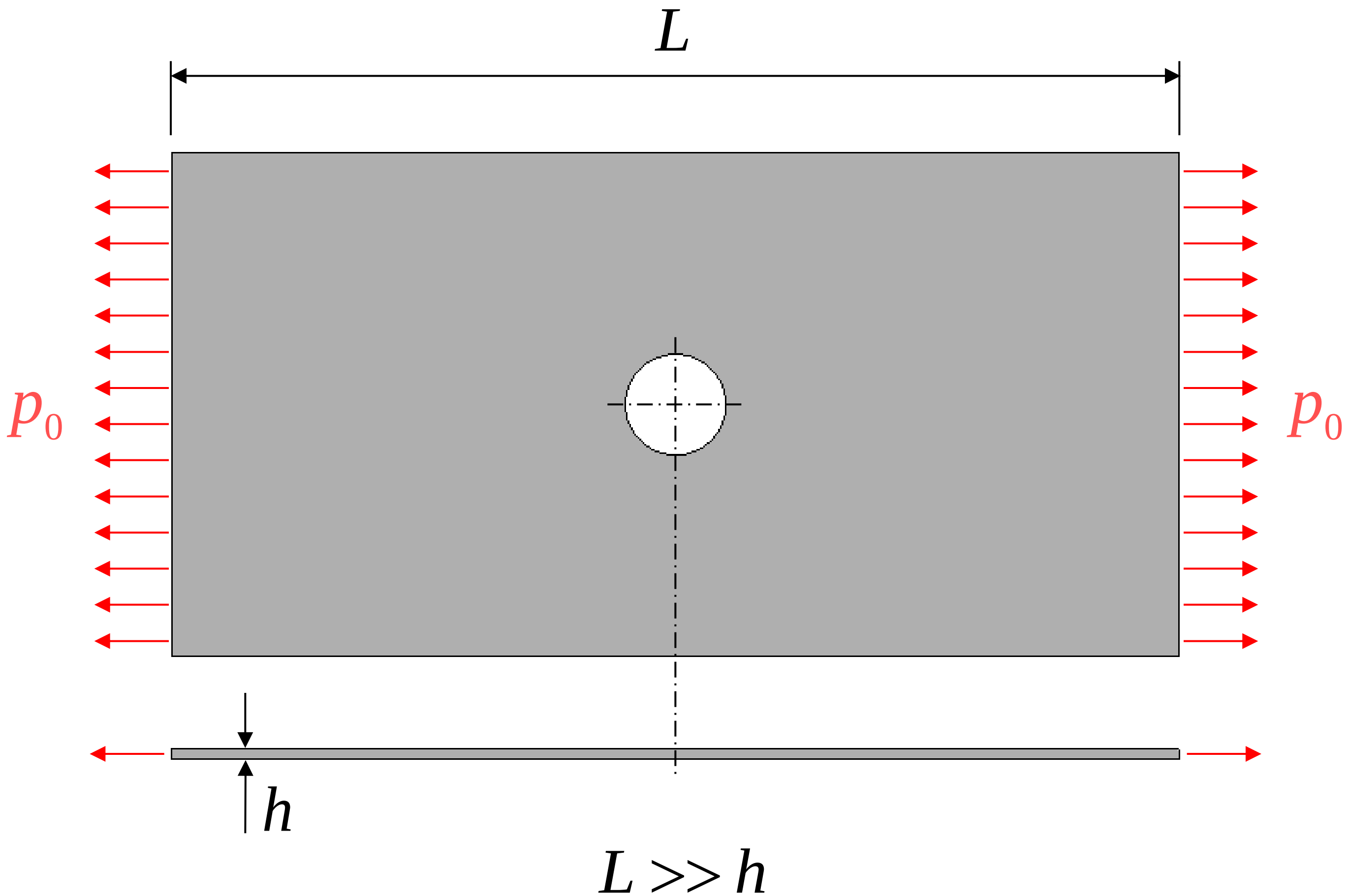
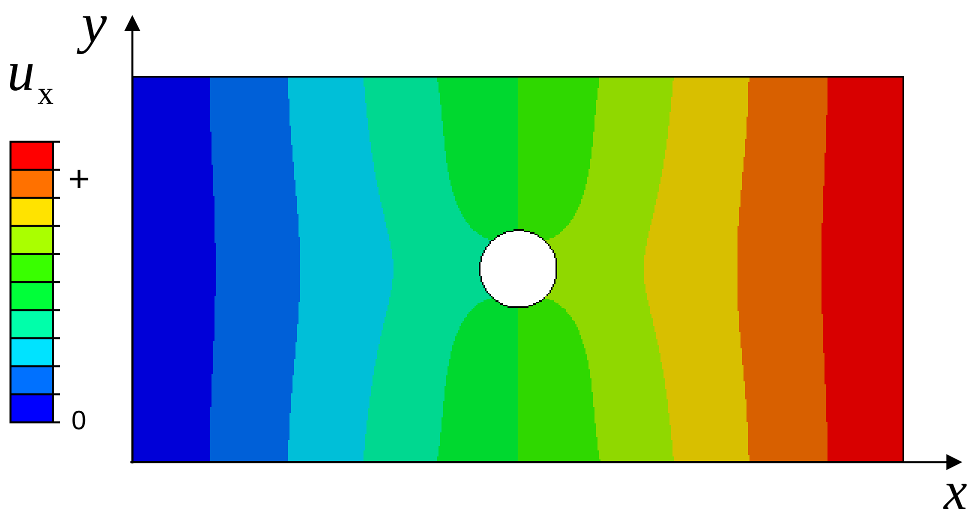
- primer reševanja volumskega mehanskega problema z MKE

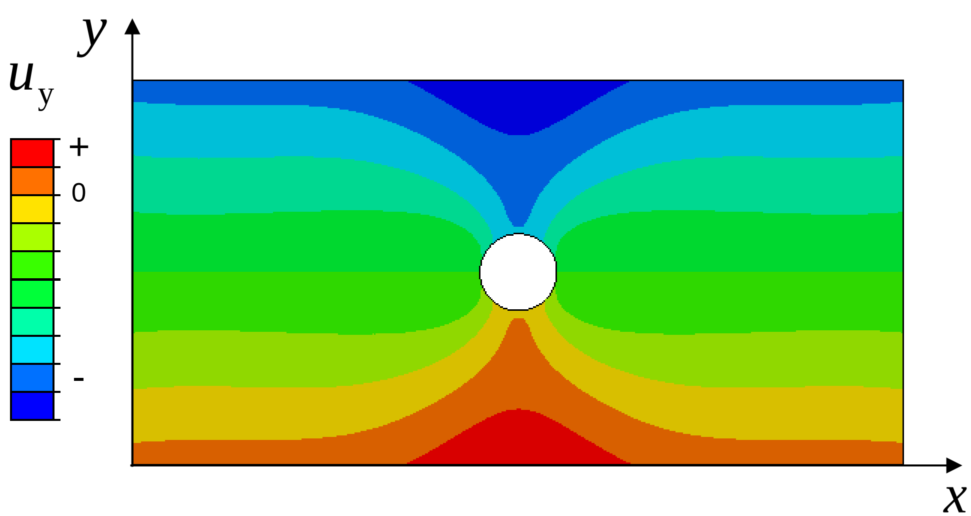


- primer reševanja volumskega mehanskega problema z MKE

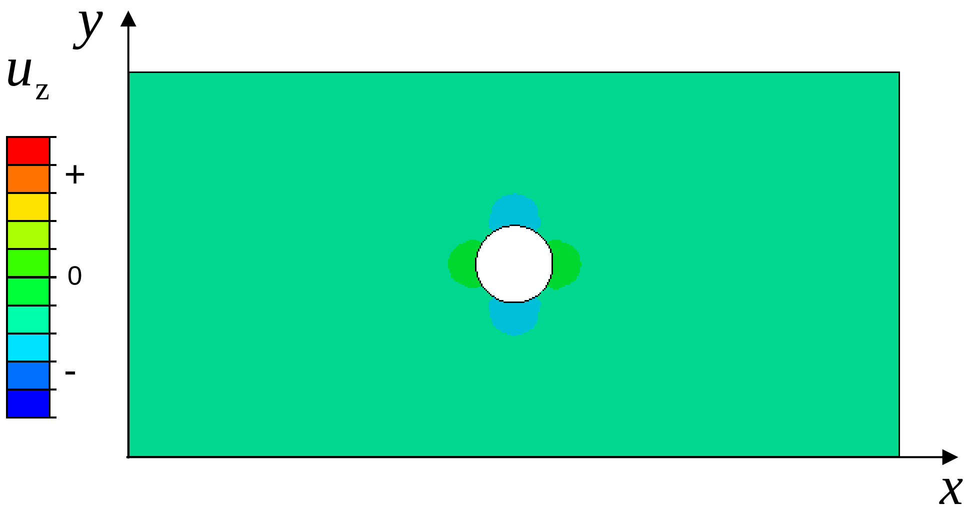


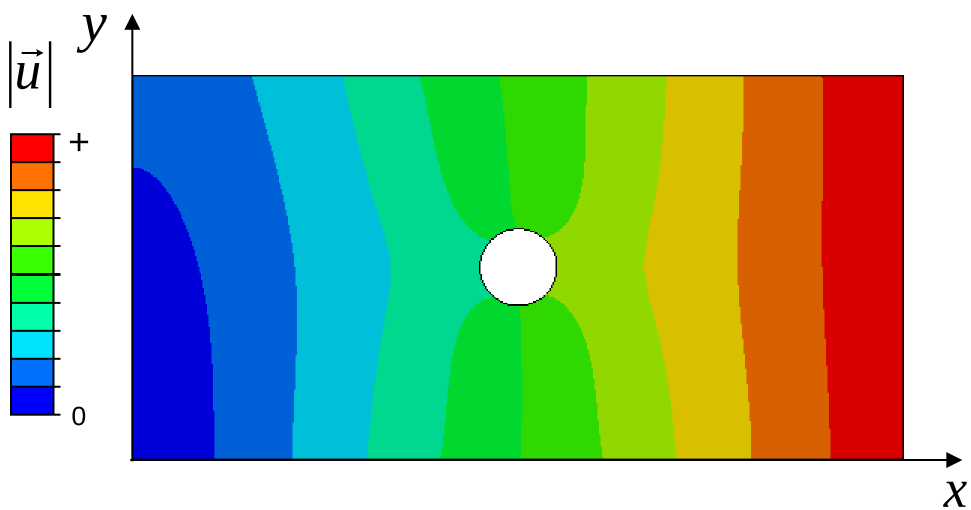
- pomiki v Kartezijevem koordinatnem sistemu



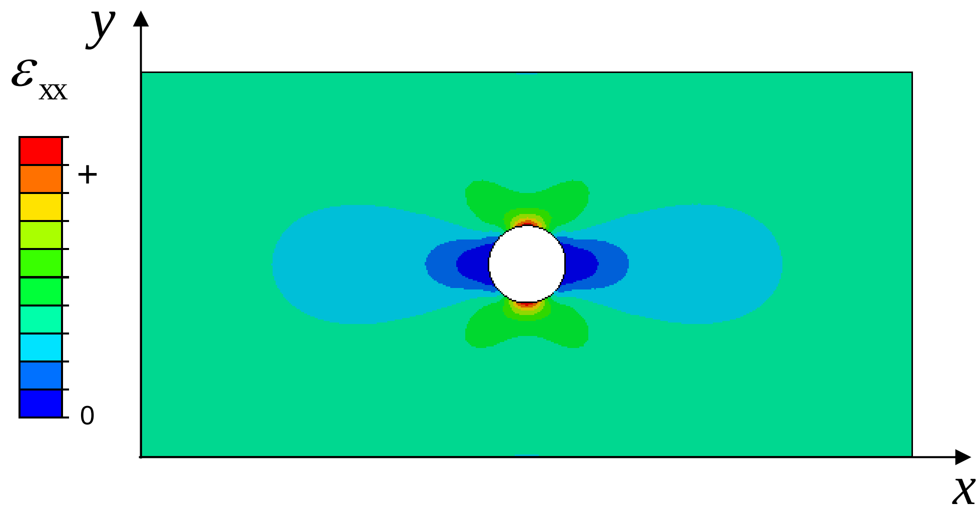


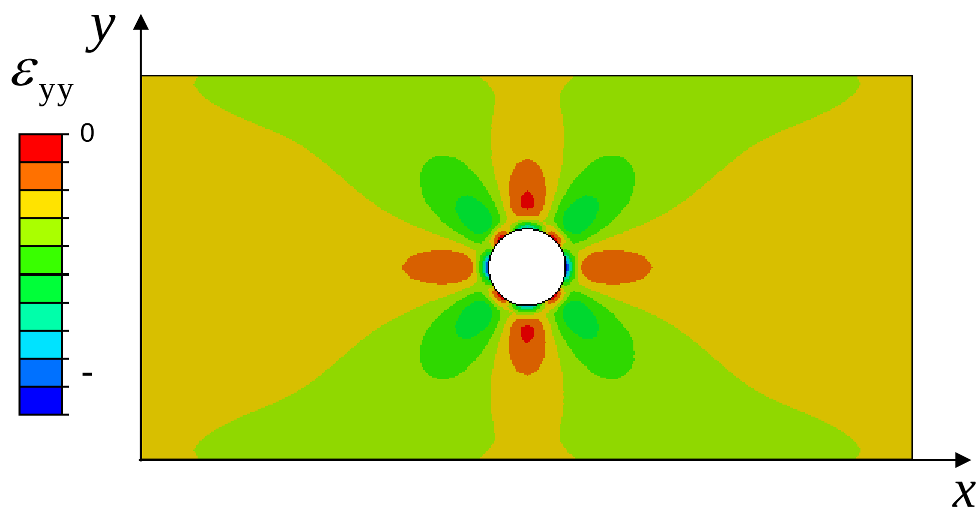
• pomiki v Kartezijevem koordinatnem sistemu



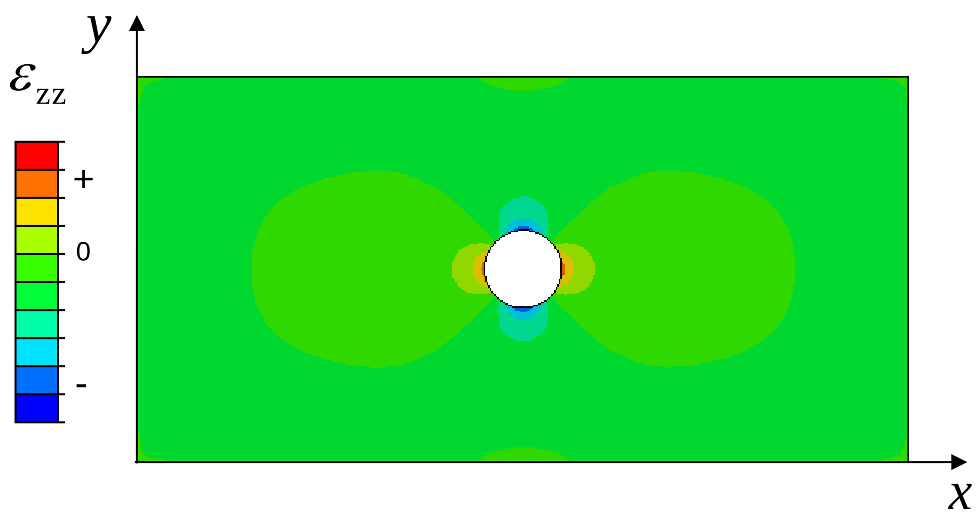


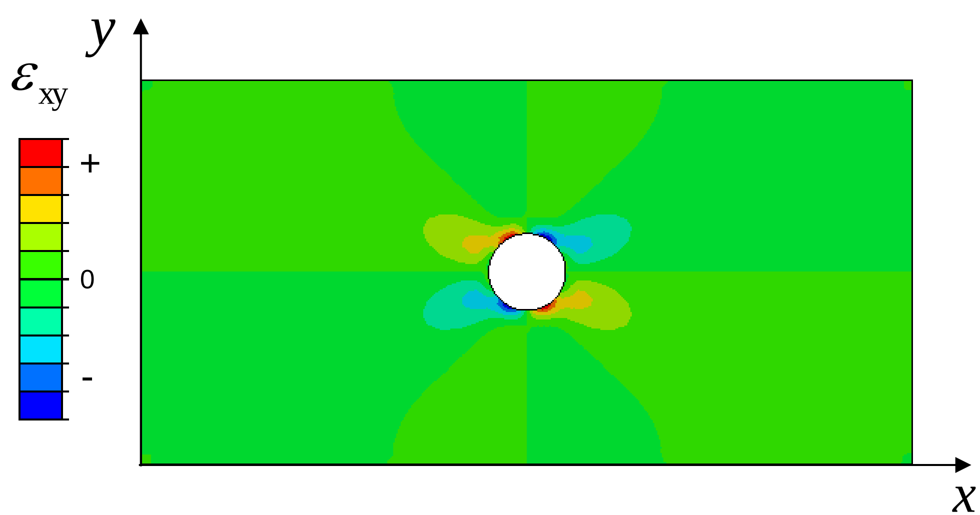
- deformacije v Kartezijevem koordinatnem sistemu



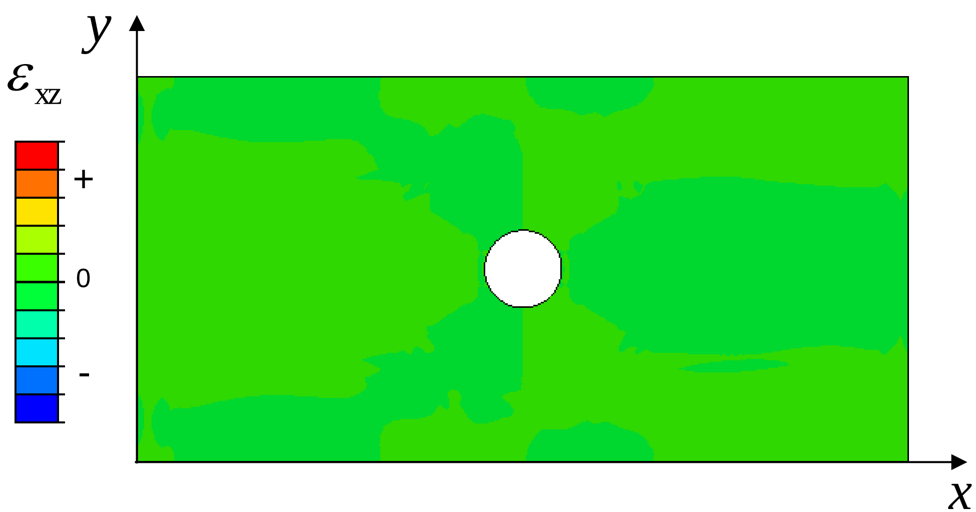


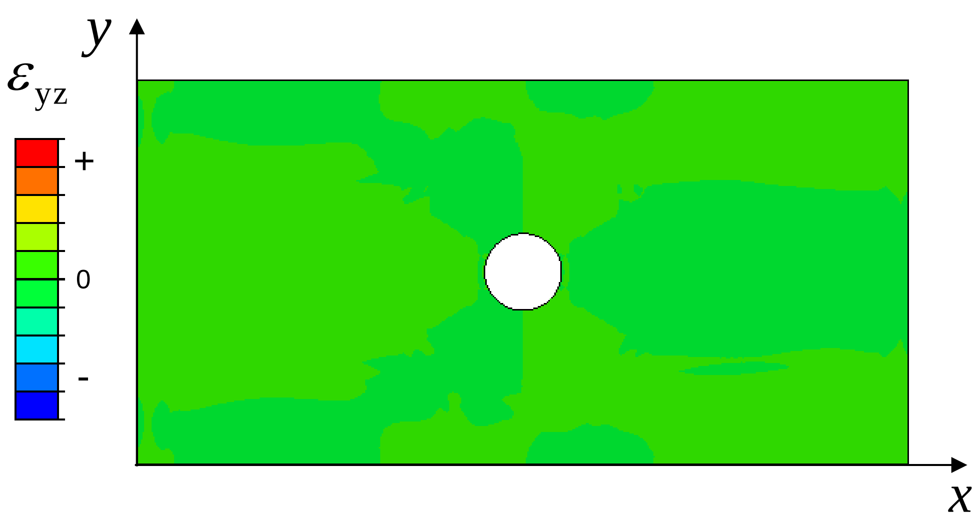
- deformacije v Kartezijevem koordinatnem sistemu



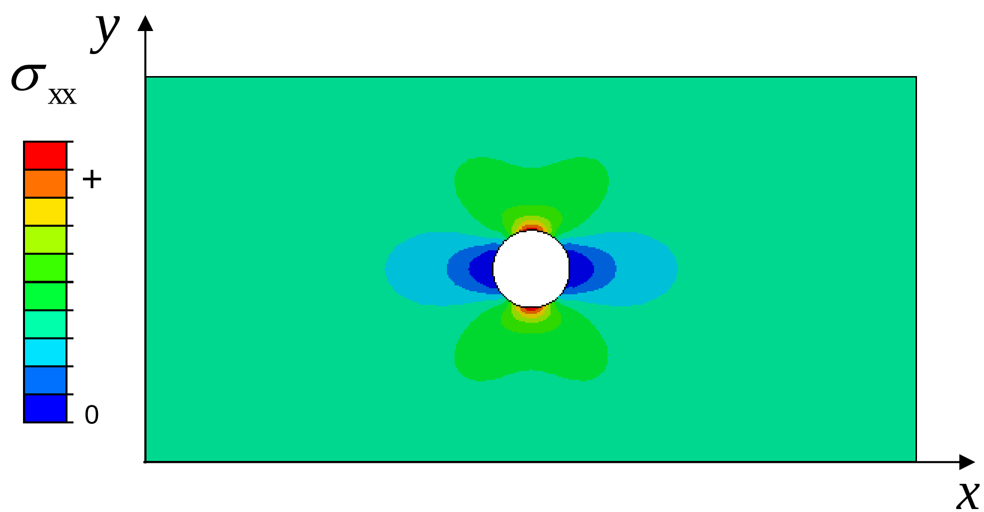


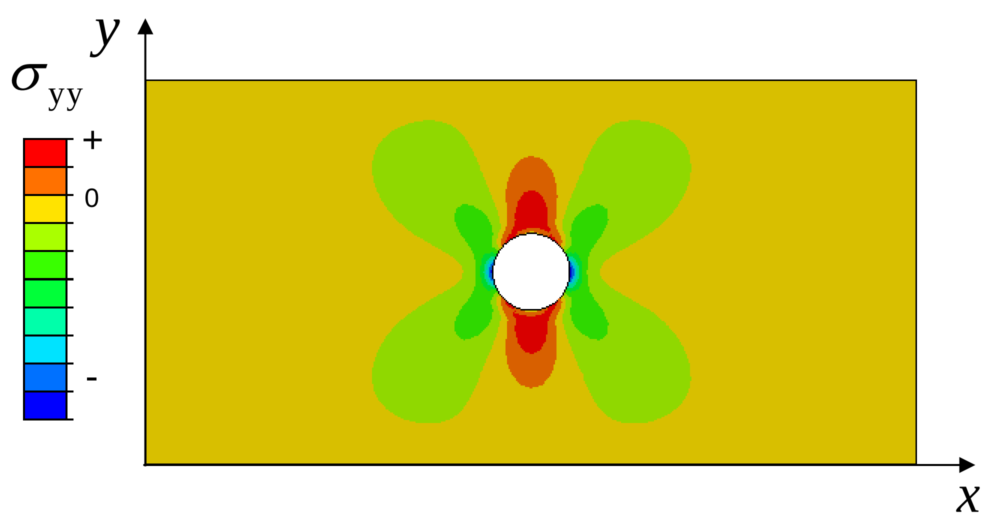
• deformacije v Kartezijevem koordinatnem sistemu



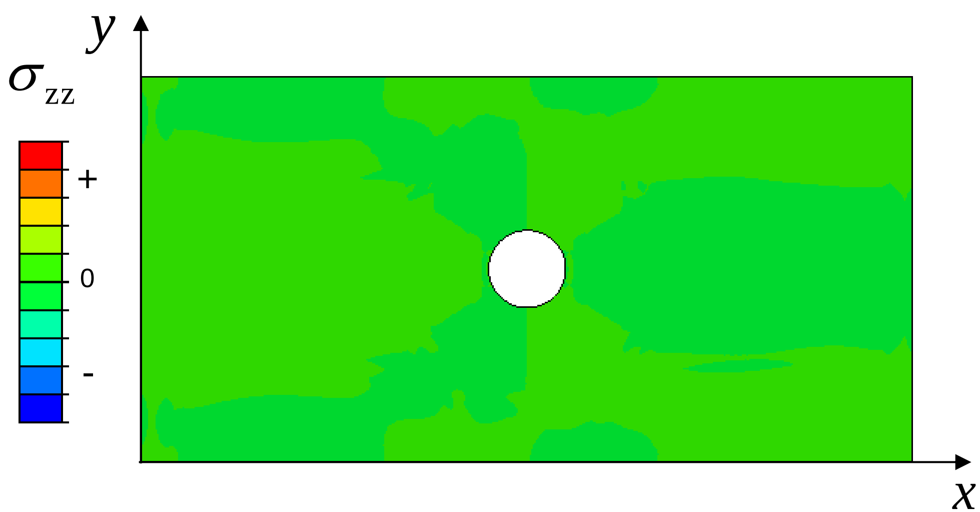


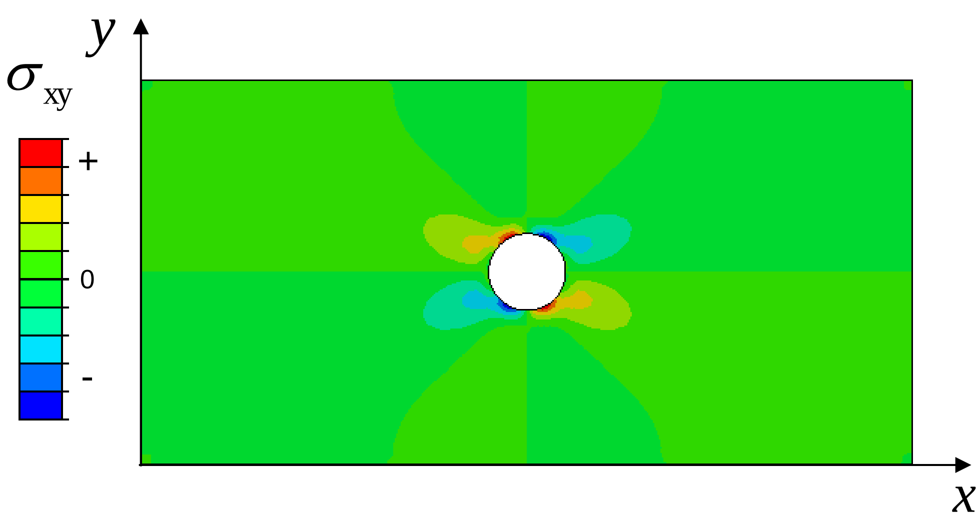
- napetosti v Kartezijevem koordinatnem sistemu



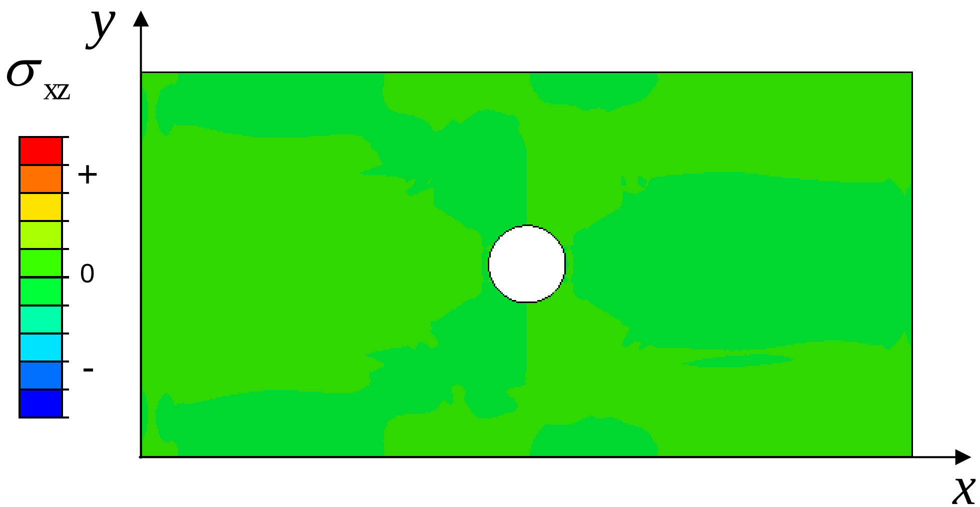


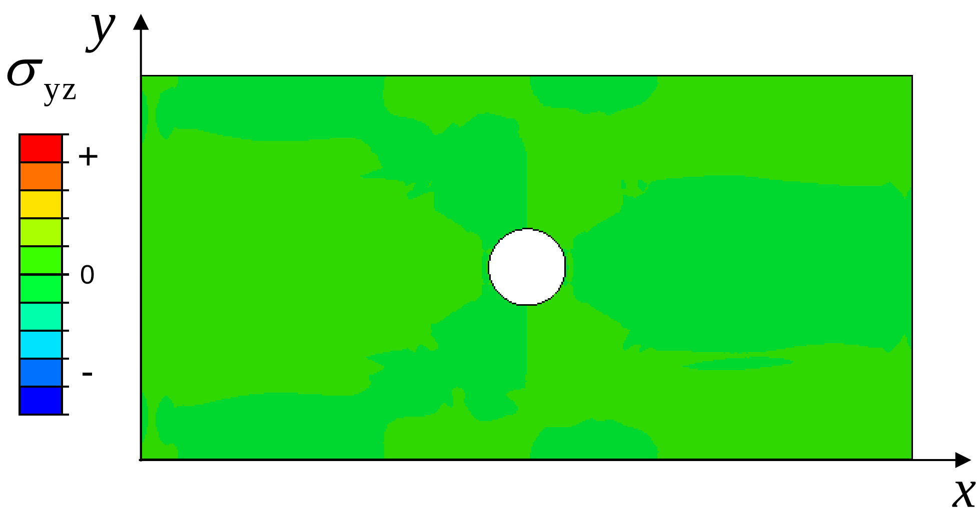
- napetosti v <u>Kartezijevem koordinatnem sistemu</u>



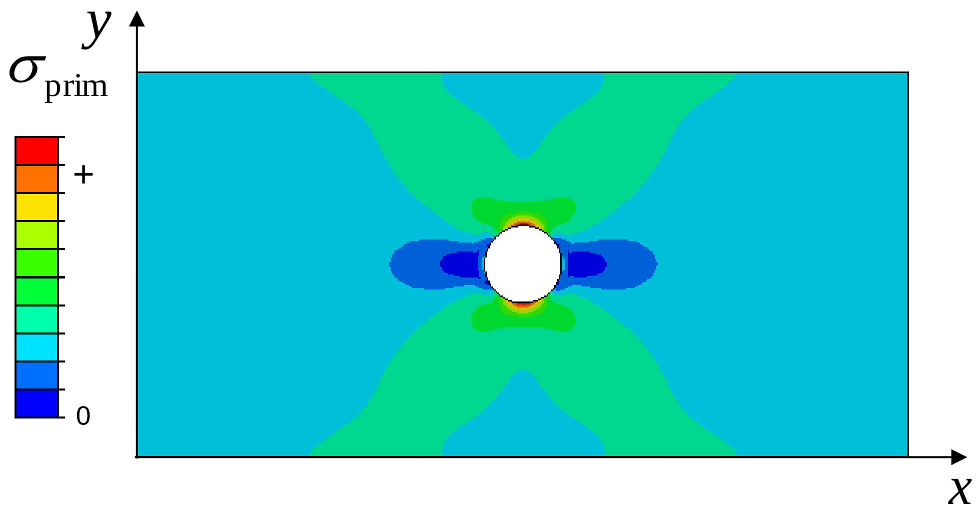


- napetosti v Kartezijevem koordinatnem sistemu





- Mises-ova primerjalna napetost



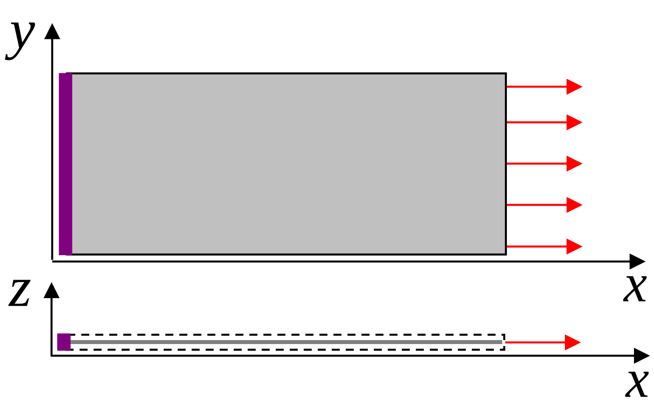
- kdaj lahko mehanski problem obravnavamo kot ravninsko napetostni problem?
  - da lahko problem obravnavamo kot ravninsko napetostni problem (privzemimo da obravnavamo ravnino (x,y)), mora biti izpolnjeno:

1) komponente napetostnega tenzorja σ_{zz} , σ_{xz} in σ_{yz} morajo biti tako majhne, da jih lahko zanemarimo

2) homogen material, katerega fizikalne lastnosti so lahko tudi ortotropne

3) predpisani robni pogoji se nanašajo na ravnino obravnavanega problema

4) obremenitev mora ležati v ravnini obravnavanega problema



- od nič različne komponente napetostnega tenzorja v Kartezijevem koordinatnem sistemu za primer ravninskega napetostnega stanja so naslednje

$$\sigma_{ij} = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} = 0 \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} = 0 \\ \sigma_{xz} = 0 & \sigma_{yz} = 0 & \sigma_{zz} = 0 \end{Bmatrix}$$

- komponente deformacijskega tenzorja lahko v Kartezijevem koordinatnem sistemu zapišemo v odvisnosti od pomikov v obravnavanem območju, upoštevajoč ravninsko napetostno stanje

$$\varepsilon_{xx}=\frac{\partial u_x}{\partial x}\ ,\ \ \varepsilon_{xy}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y}+\frac{\partial u_y}{\partial x}\right)$$

$$\varepsilon_{yy}=\frac{\partial u_y}{\partial y}\ ,\ \ \varepsilon_{xz}=0\ ,\ \ \varepsilon_{yz}=0$$

$$\varepsilon_{zz}=?$$

$$\begin{Bmatrix}\varepsilon_{xx}\\ \varepsilon_{yy}\\ \varepsilon_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial x} & 0\\ 0 & \frac{\partial}{\partial y}\\ \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y} & \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_x\\ u_y\end{Bmatrix}=[L]\{u\}$$

- za homogeni, izotropni, linearno elastični material, lahko iz zveze med napetostmi in deformacijami, ki jo definira Hookov zakon, izračunamo komponento deformacijskega tenzorja ε_{zz} in komponente napetostnega tenzorja σ_{xx} , σ_{yy} in σ_{xy}

$$\sigma_{zz} = 0 = \frac{E}{(1+v)(1-2v)}[v\varepsilon_{xx} + v\varepsilon_{yy} + (1-v)\varepsilon_{zz}] \Rightarrow \varepsilon_{zz} = -\frac{v}{(1-v)}\left[\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}\right]$$

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{(1+v)(1-2v)}[(1-v)\varepsilon_{xx} + v\varepsilon_{yy} + v\varepsilon_{zz}]$$

$$\sigma_{yy} = \frac{E}{(1+v)(1-2v)}[v\varepsilon_{xx} + (1-v)\varepsilon_{yy} + v\varepsilon_{zz}]$$

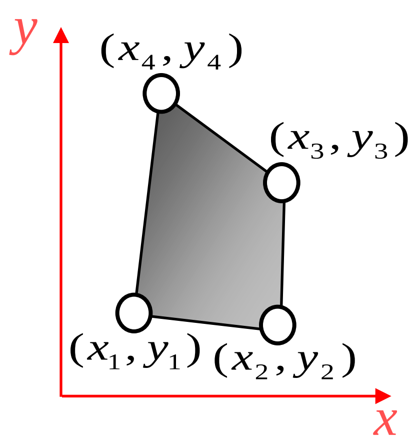
$$\sigma_{xy} = \frac{E}{(1+v)}\varepsilon_{xy}$$

• izoparametrični 2D KE

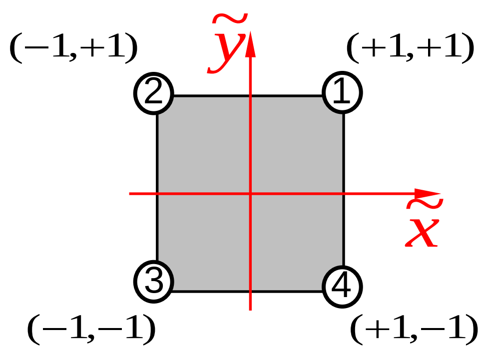
• interpolacija geometrije KE

$$x = x(\tilde{x},\tilde{y}) = \sum_{j=1}^{N_v} x_j \; \tilde{\psi}_j(\tilde{x},\tilde{y})$$

$$y = y(\tilde{x},\tilde{y}) = \sum_{j=1}^{N_v} y_j \; \tilde{\psi}_j(\tilde{x},\tilde{y})$$



Kartezijev 2D koordinatni sistem



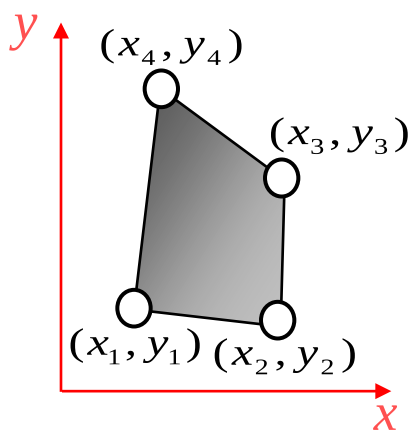
naravni koordinatni sistem

• interpolacija polja pomikov po območju KE

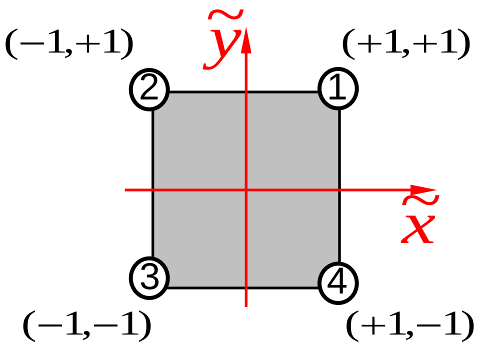
$$\{u\}_e = \{u_x, u_y\}^T$$

$$u_x(x,y) \approx \hat{u}_x(x,y) = \tilde{u}_x(\tilde{x},\tilde{y}) = \sum_{j=1}^{N_v} U_j^x \, \tilde{\psi}_j(\tilde{x},\tilde{y}) = \left\{U^x\right\}\{\tilde{\psi}\}$$

$$u_y(x,y) \approx \hat{u}_y(x,y) = \tilde{u}_y(\tilde{x},\tilde{y}) = \sum_{j=1}^{N_v} U_j^y \, \tilde{\psi}_j(\tilde{x},\tilde{y}) = \left\{U^y\right\}\{\tilde{\psi}\}$$



Kartezijev 2D koordinatni sistem



naravni koordinatni sistem

• matrični zapis enačbe KE za linearno elastični statično obremenjeni problem

• za posamezni KE dobimo toliko enačb, kolikor ima KE prostostnih stopenj

• v vozlišču KE sta neznani dve primarni veličini – pomika, tako da ima posamezni KE $(2*N_v)$ prostostnih stopenj

$$[K]_e \{U\}_e = \{F\}_e$$

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & \cdots & K_{1(2N_v)} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & \cdots & K_{2(2N_v)} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & \cdots & K_{3(2N_v)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{(2N_v)1} & K_{(2N_v)2} & K_{(2N_v)3} & \cdots & K_{(2N_v)(2N_v)} \end{bmatrix}_e \begin{Bmatrix} U_{1x} \\ U_{1y} \\ U_{2x} \\ \vdots \\ U_{(2N_v)y} \end{Bmatrix}_e = \begin{Bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ F_{2x} \\ \vdots \\ F_{(2N_v)y} \end{Bmatrix}_e$$

- togostna matrika $[K]_e$ se izračuna na sledeči način

$$[K]_e = \int_{\Omega_e} \left([L][N]\right)^T [E] \left([L][N]\right) h \,\mathrm{d}\Omega$$

$$\{u\}_e = \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \{\psi\} & 0 \\ 0 & \{\psi\} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{U^x\} \\ \{U^y\} \end{Bmatrix} = [N]\{U\}_e$$

$$[L] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y} & \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}$$

- posamezni element vektorja $\{F\}_e$ predstavlja v vozlišču KE delujočo vektorsko komponento sile v smeri določene koordinatne osi

- v primeru, da je velikost vektorske komponente pomika v smeri določene koordinatne osi v vozlišču KE poznana, velikost točkovne mehanske obremenitve v tej smeri ni poznana

$$U_{\mathrm{ik}} = \checkmark \quad \Rightarrow \quad F_{\mathrm{ik}} = ?\ , \quad \mathrm{i} = 1,..,\mathrm{N_v}\ , \ \ \mathrm{k} = \mathrm{x}, \mathrm{y}$$

- v primeru, da <u>velikost komponente pomika</u> v smeri določene koordinatne osi v vozlišču KE <u>ni poznana</u>, je velikost točkovne mehanske obremenitve v tej smeri <u>možno izračunati</u>

$$U_{ik} = ? \quad \Rightarrow \quad F_{ik} = \checkmark , \quad \mathrm{i} = 1,.., \mathrm{N_v} \;, \; \mathrm{k} = \mathrm{x}, \mathrm{y}$$

- v primeru <u>točkovne mehanske obremenitve</u> na ograji obravnavanega območja, mrežo KE generiramo tako, da točka, v kateri deluje točkovna obremenitev, sovpada z vozliščem KE

$$F_{\mathrm{Ik}} = F_{\mathrm{Tk}} \;, \quad \mathrm{I} = \{1,.., \mathrm{N_{KE}}\} \;, \; \mathrm{k} = \mathrm{x}, \mathrm{y}$$

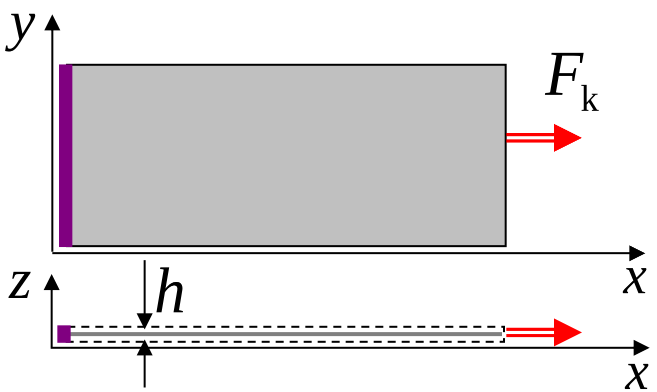
- točkovna obremenitev:
  - je vezana na <u>vozlišče</u> mreže KE in ne na posamezni KE

- velikost točkovne obremenitve F_k predstavlja celotno silo po debelini obravnavanega območja v smeri "z" koordinatne osi

$$F_\mathrm{k} = h\, f_\mathrm{k} \quad , \mathrm{k} = \mathrm{x}, \mathrm{y}$$

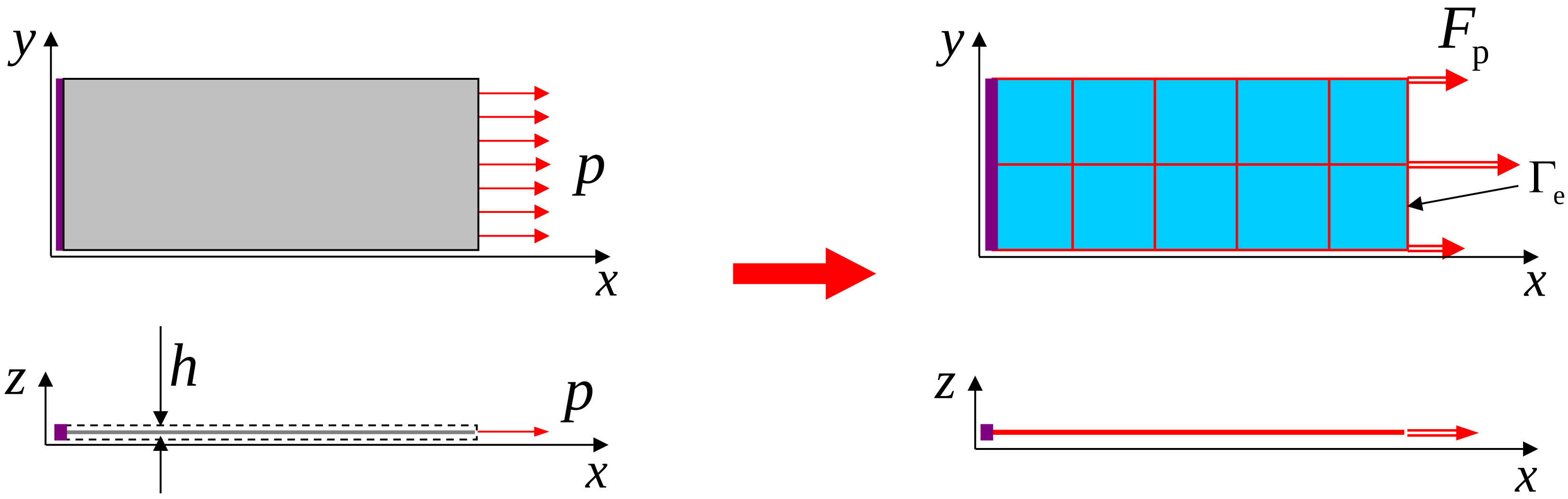
$$F_\mathrm{k} \;\; [\mathrm{N}]$$

$$f_\mathrm{k} \;\; [\mathrm{N/m}]$$



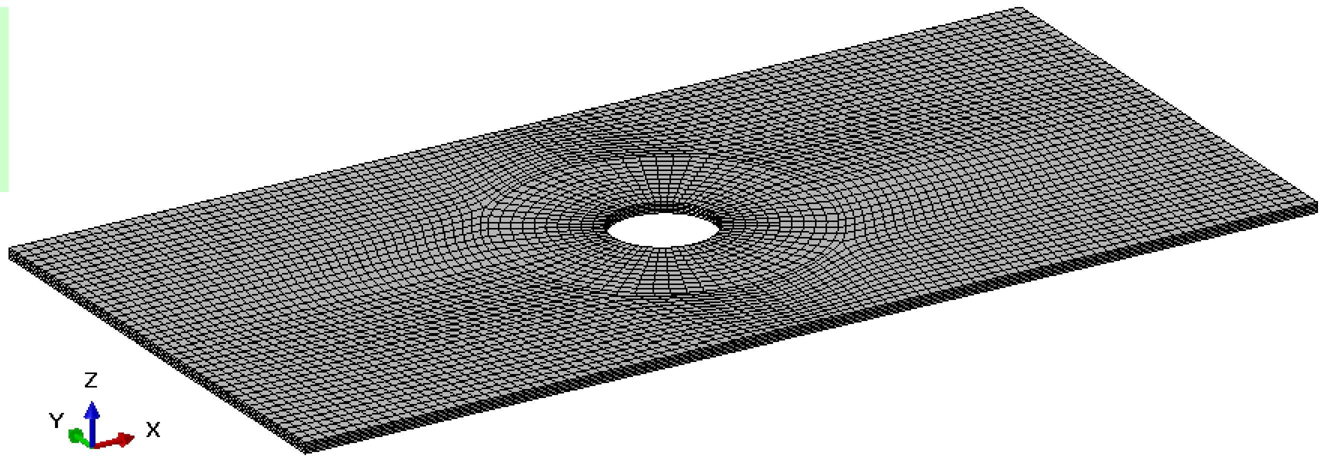
- v primeru ploskovno porazdeljene mehanske obremenitve na ograji obravnavanega območja, izračunamo ekvivalentne vozliščne sile za posamezni KE

$$\{F_{\mathrm{p}}\}_{\mathrm{e}} = \int_{\Gamma_{\mathrm{e}}} p[N]^T h \, \mathrm{d}\Gamma$$

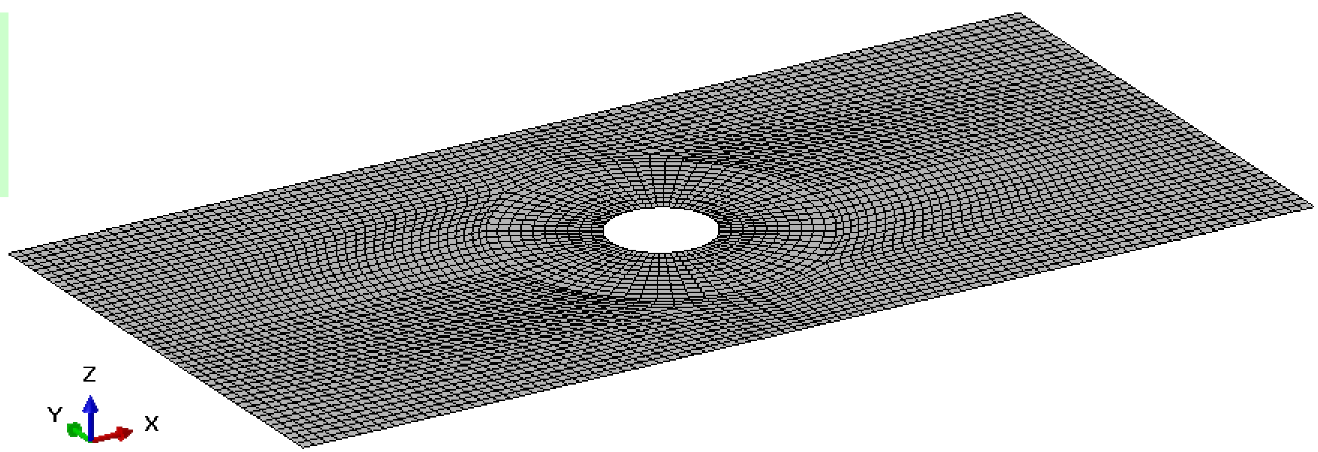


- primer reševanja ravninsko napetostnega mehanskega problema z MKE

3D KE:
21600 KE (6 pl., 8 vozl.)
26900 vozlišč
80700 enačb

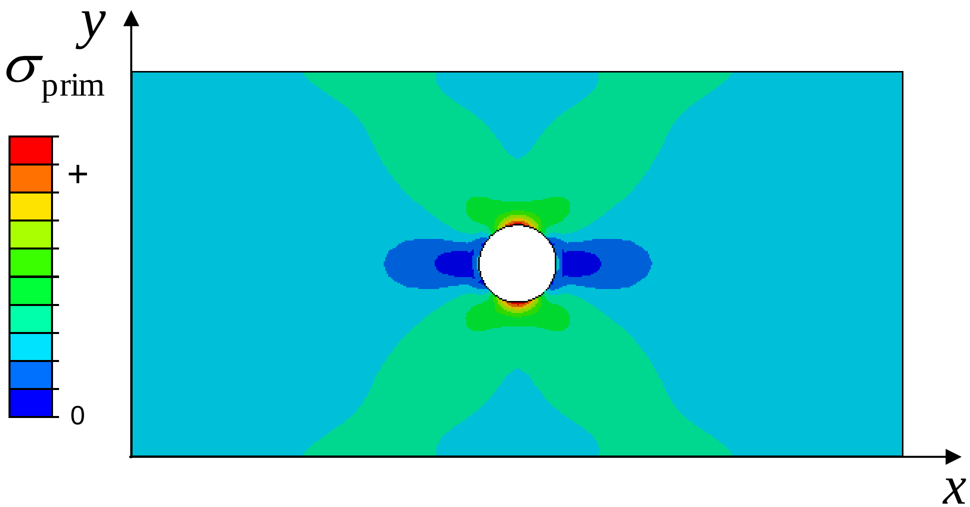


2D rav. nap. KE:
4600 KE (4 str., 4 vozl.)
4800 vozlišč
9600 enačb

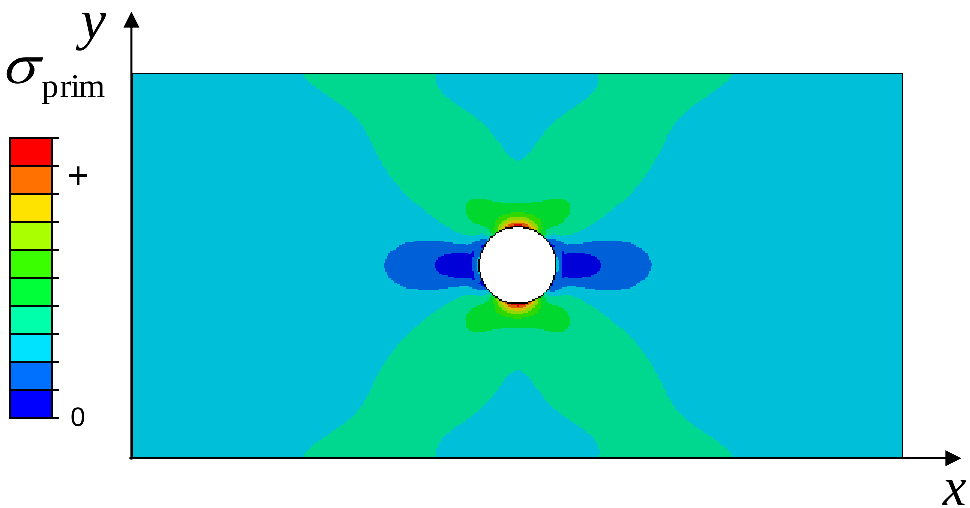


• primerjava Mises-ove primerjalne napetosti: 3D KE ⟷ 2D ravn. nap. KE

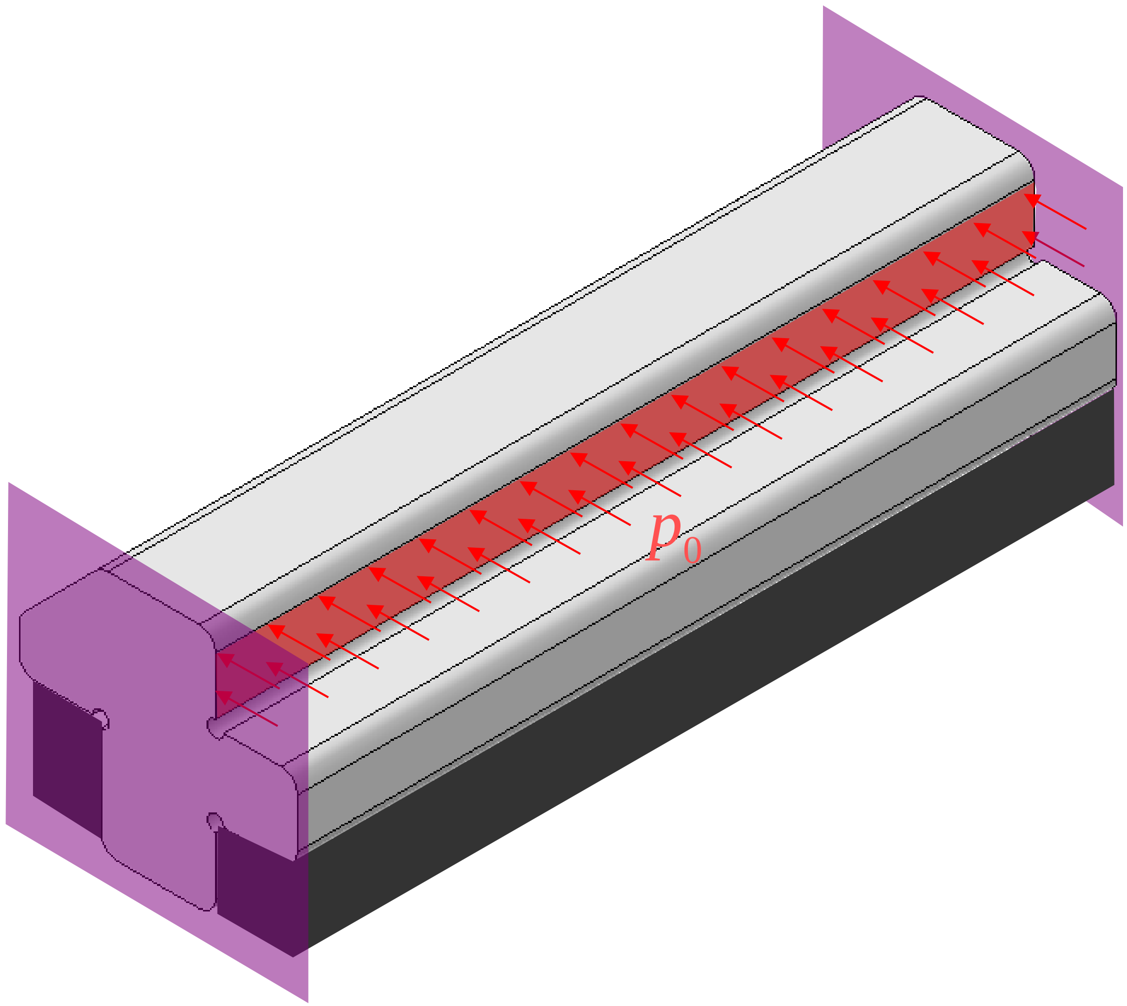
3D KE



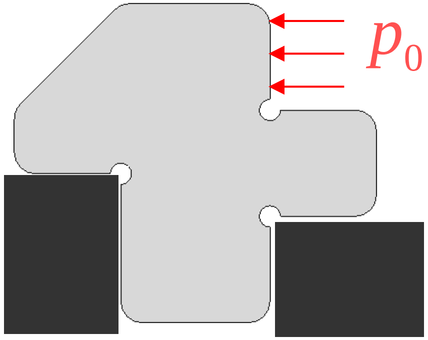
2D KE



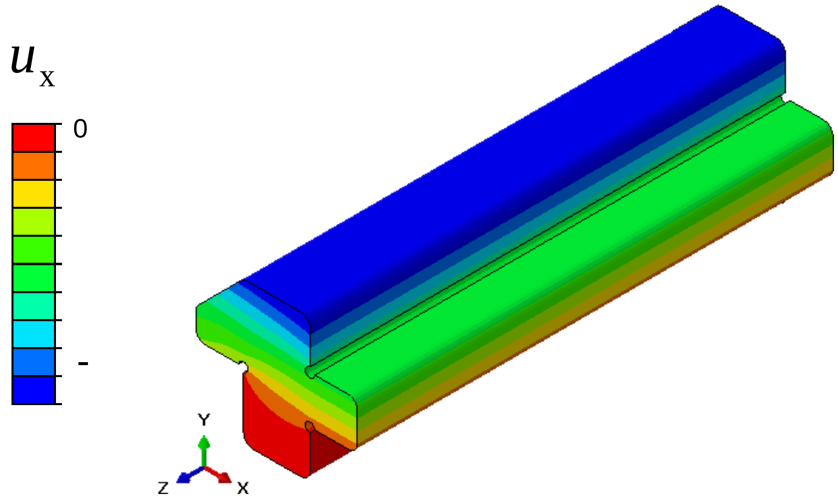
- primer reševanja volumskega mehanskega problema z MKE

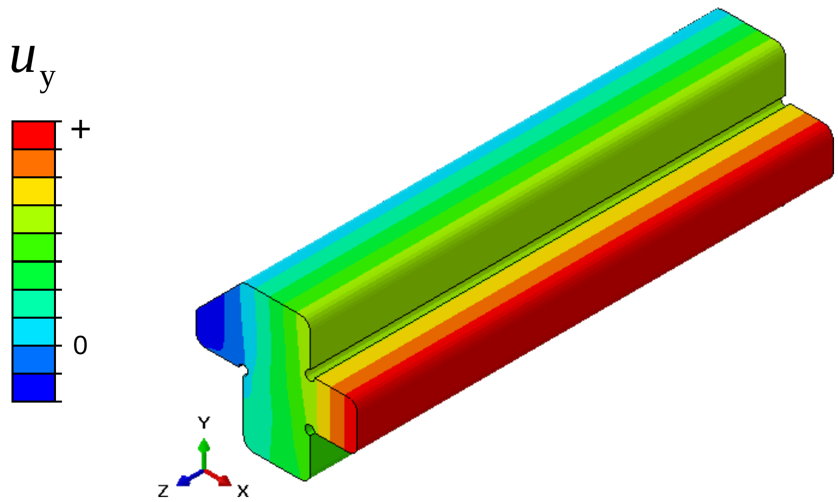


- primer reševanja volumskega mehanskega problema z MKE

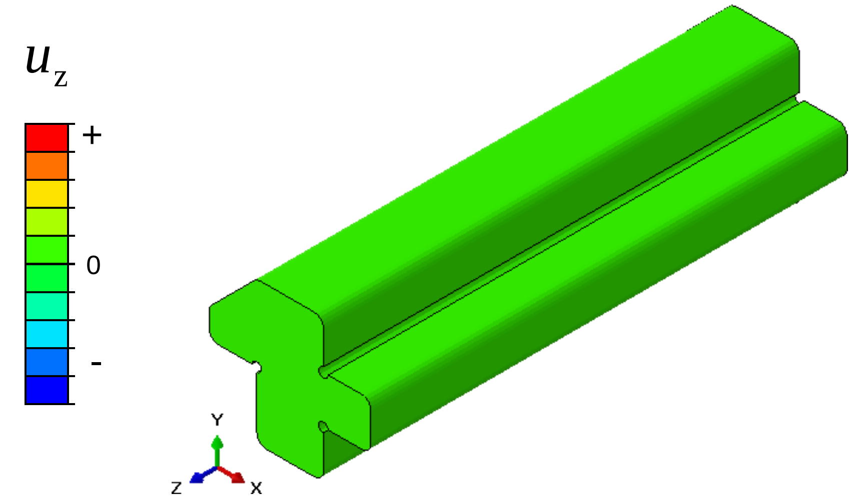


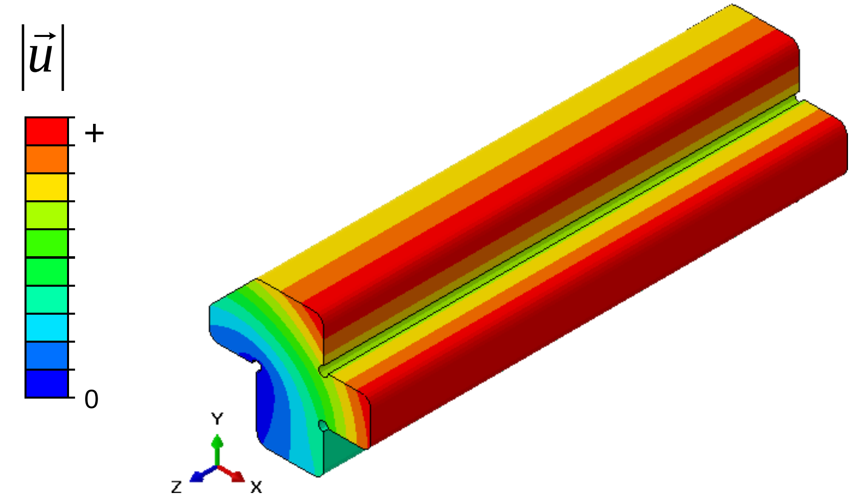
• pomiki v <u>Kartezijevem koordinatnem sistemu</u>



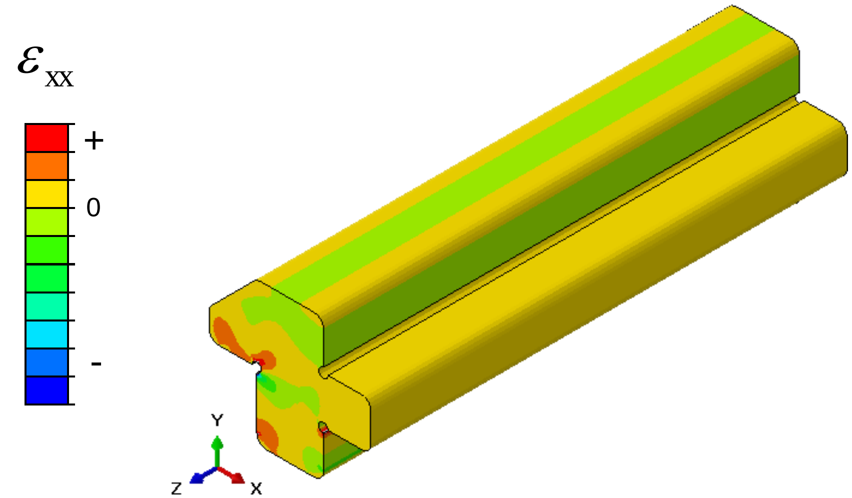


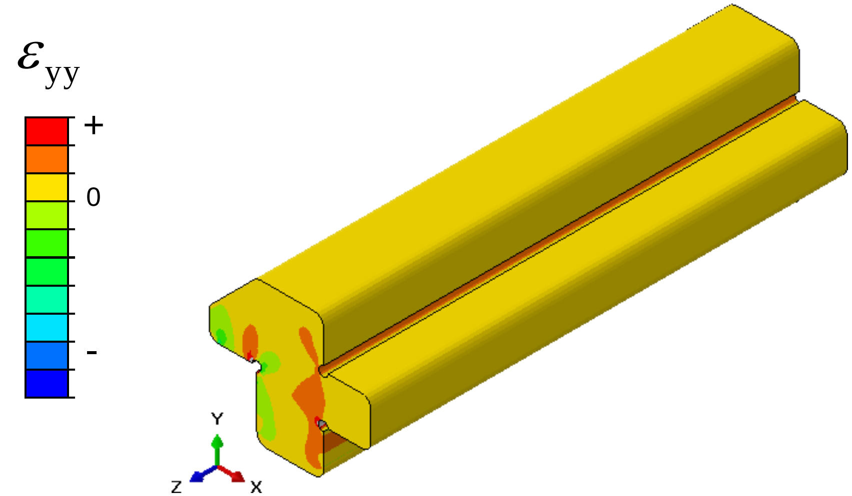
- pomiki v Kartezijevem koordinatnem sistemu



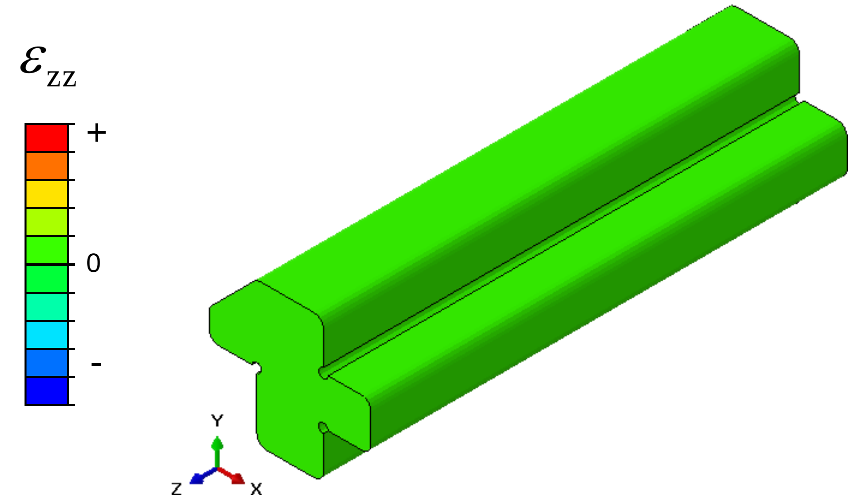


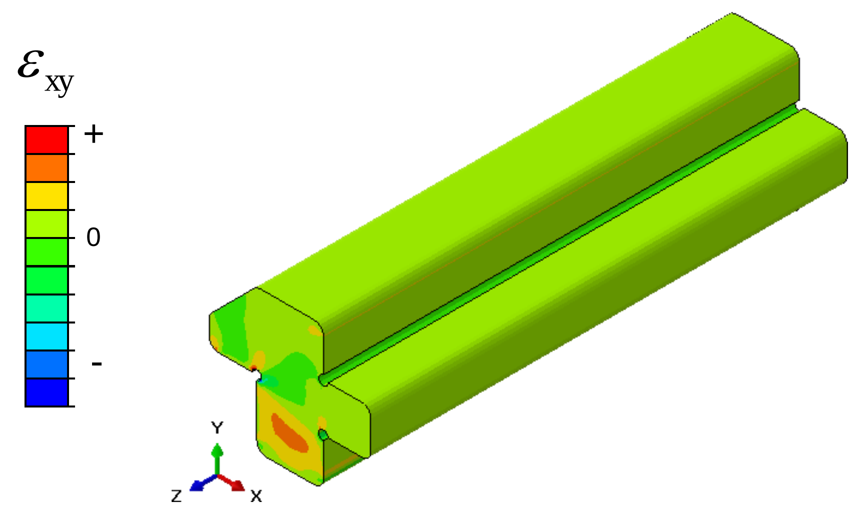
• deformacije v Kartezijevem koordinatnem sistemu



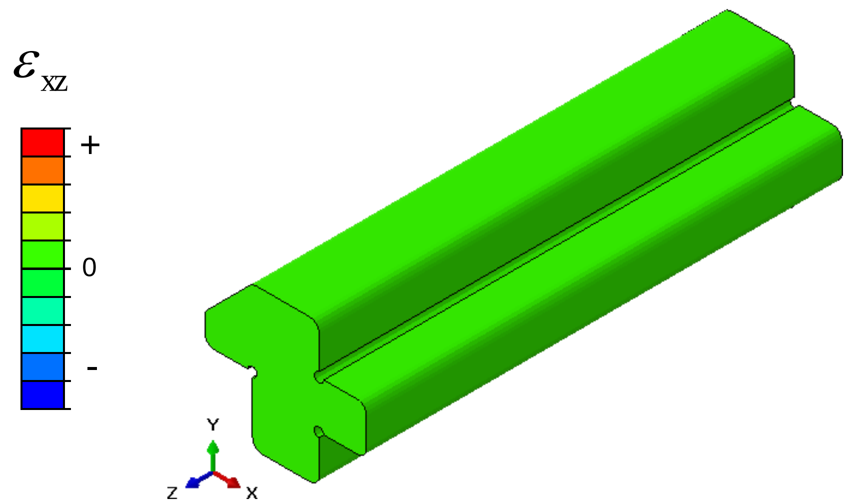


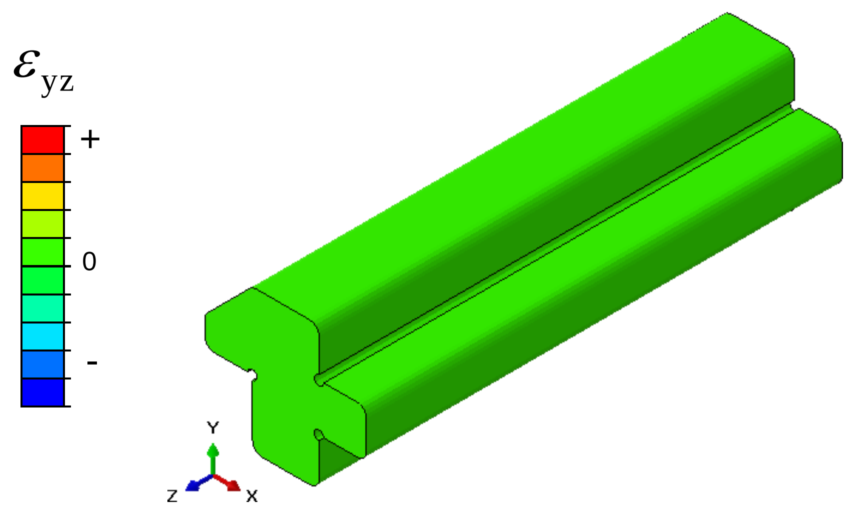
- deformacije v Kartezijevem koordinatnem sistemu



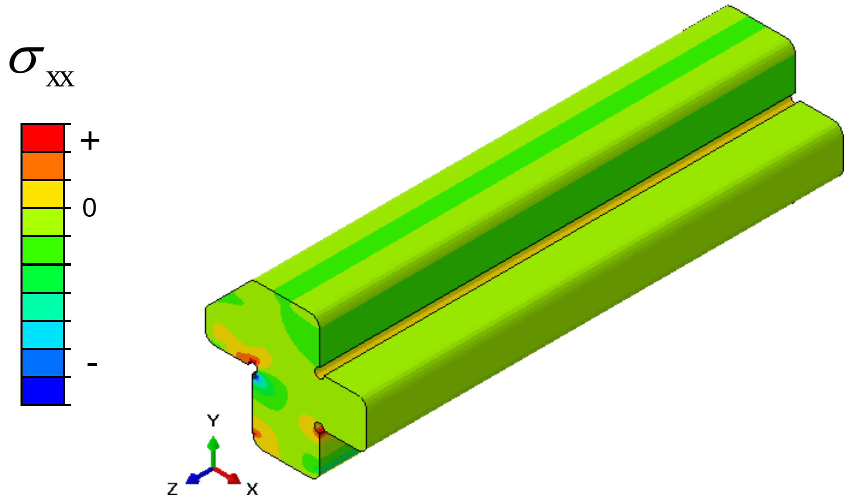


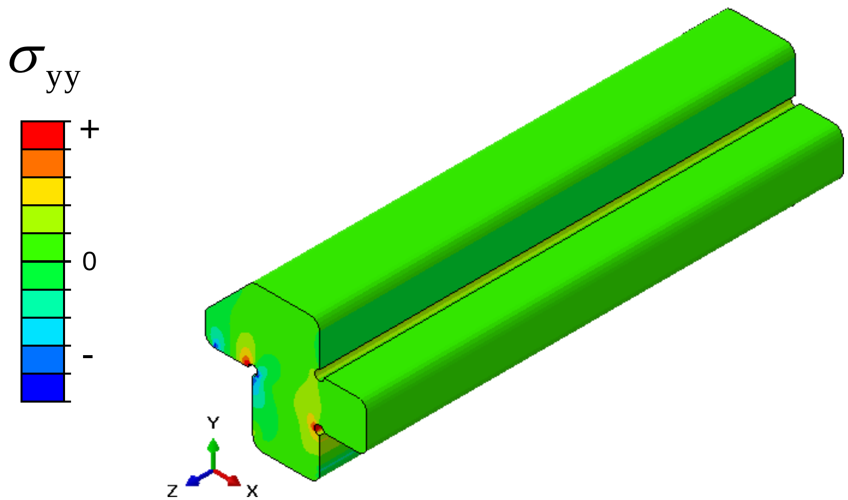
- deformacije v <u>Kartezijevem koordinatnem sistemu</u>



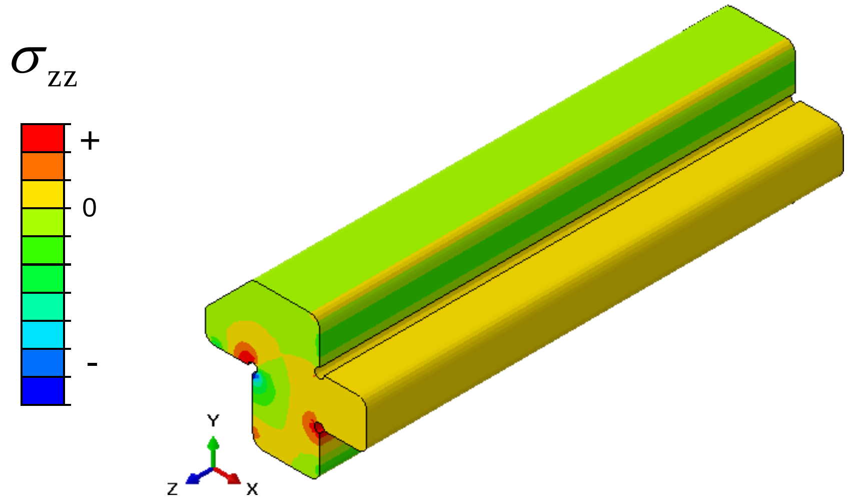


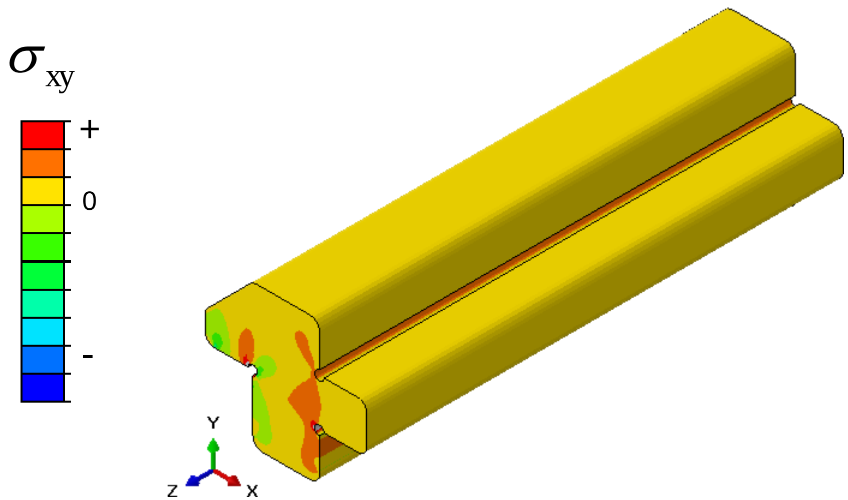
• napetosti v Kartezijevem koordinatnem sistemu



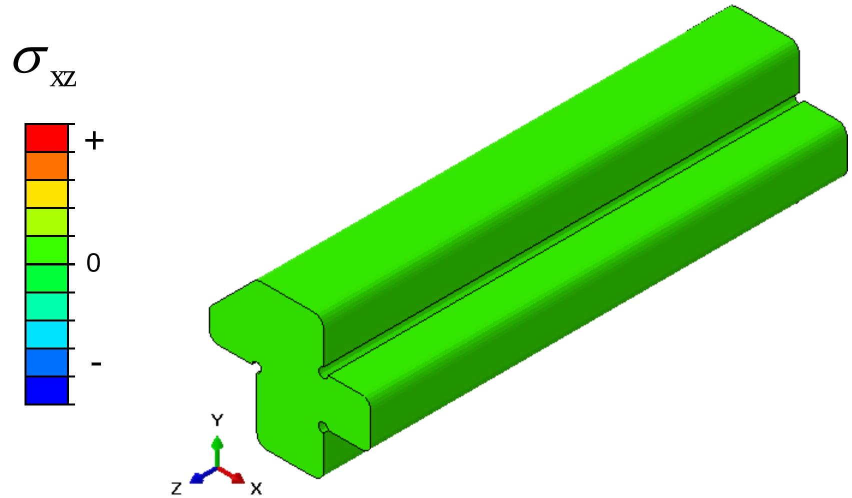


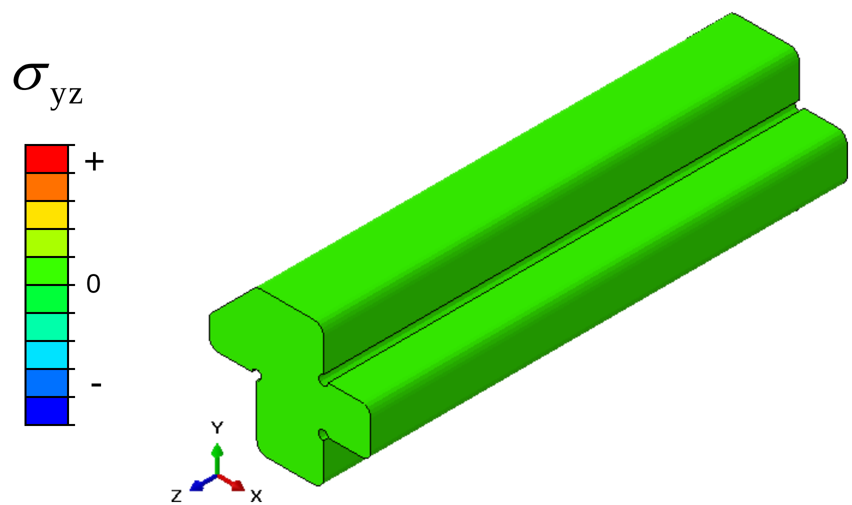
- napetosti v <u>Kartezijevem koordinatnem sistemu</u>



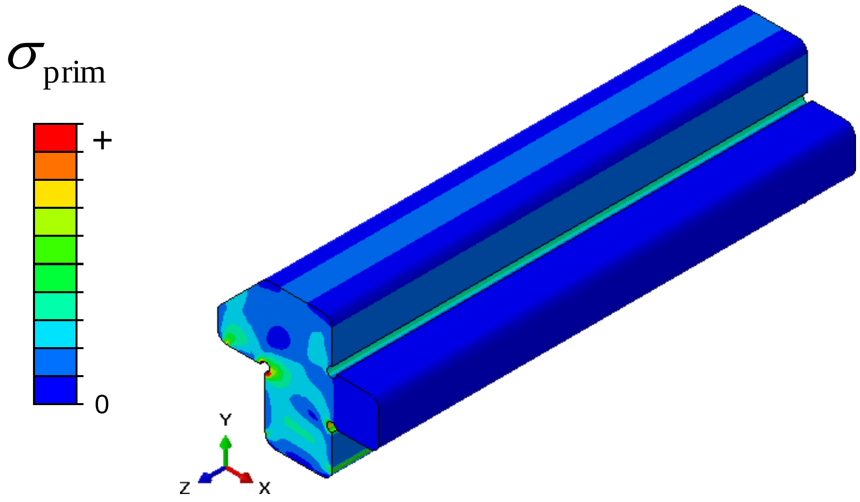


- napetosti v Kartezijevem koordinatnem sistemu





- Mises-ova primerjalna napetost



- kdaj lahko mehanski problem obravnavamo kot ravninsko deformacijski problem?

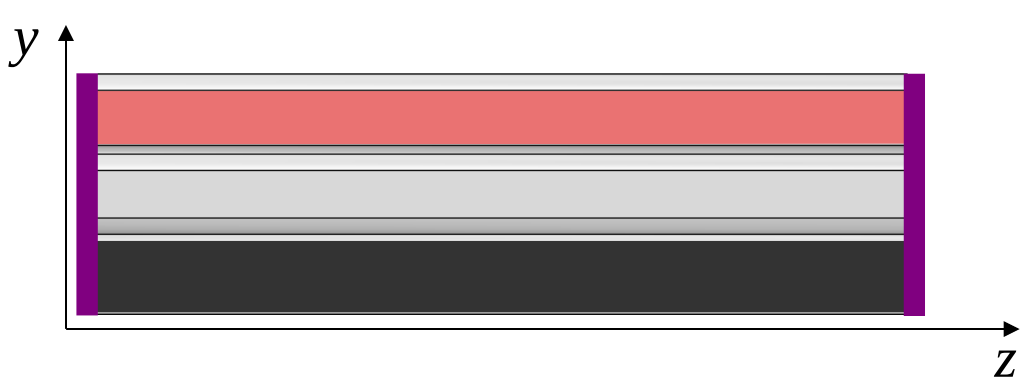
  - da lahko problem obravnavamo kot ravninsko deformacijski problem (privzemimo da obravnavamo ravnino (x,y)), mora biti izpolnjeno:

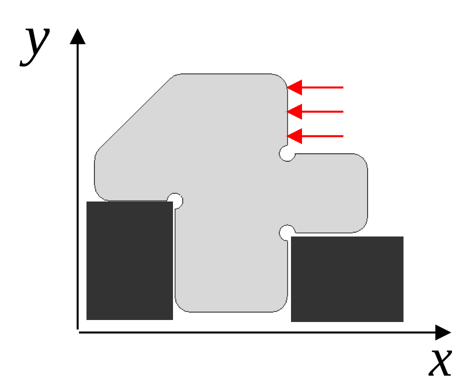
1) komponente deformacijskega tenzorja ε_{zz} , ε_{xz} in ε_{yz} morajo biti tako majhne, da jih lahko zanemarimo

2) homogen material, katerega fizikalne lastnosti so lahko ortotropne

3) predpisani robni pogoji se vzdolž “z” koordinatne osi ne spreminjajo

4) obremenitev se vzdolž “z” koordinatne osi ne spreminja





- komponente deformacijskega tenzorja lahko v Kartezijevem koordinatnem sistemu zapišemo v odvisnosti od pomikov v obravnavanem območju, upoštevajoč ravninsko deformacijsko stanje

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x}\ ,\ \ \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right)$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y}$$

$$\varepsilon_{zz} = 0\ ,\ \ \varepsilon_{xz} = 0\ ,\ \ \varepsilon_{yz} = 0$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y} & \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \end{Bmatrix} = [L]\{u\}$$

- od nič različne komponente napetostnega tenzorja v Kartezijevem koordinatnem sistemu za primer ravninskega deformacijskega stanja so naslednje

$$\sigma_{ij} = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} = 0 \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} = 0 \\ \sigma_{xz} = 0 & \sigma_{yz} = 0 & \sigma_{zz} \end{Bmatrix}$$

- za homogeni, izotropni, linearno elastični material, lahko iz zveze med napetostmi in deformacijami, ki jo definira Hookov zakon, izračunamo od nič različne komponente napetostnega tenzorja

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{(1+v)(1-2v)}\left[(1-v)\,\varepsilon_{xx} + v\,\varepsilon_{yy}\right]$$

$$\sigma_{yy} = \frac{E}{(1+v)(1-2v)}\left[v\,\varepsilon_{xx} + (1-v)\,\varepsilon_{yy}\right]$$

$$\sigma_{zz} = \frac{E}{(1+v)(1-2v)}\left[v\,\varepsilon_{xx} + v\,\varepsilon_{yy}\right]$$

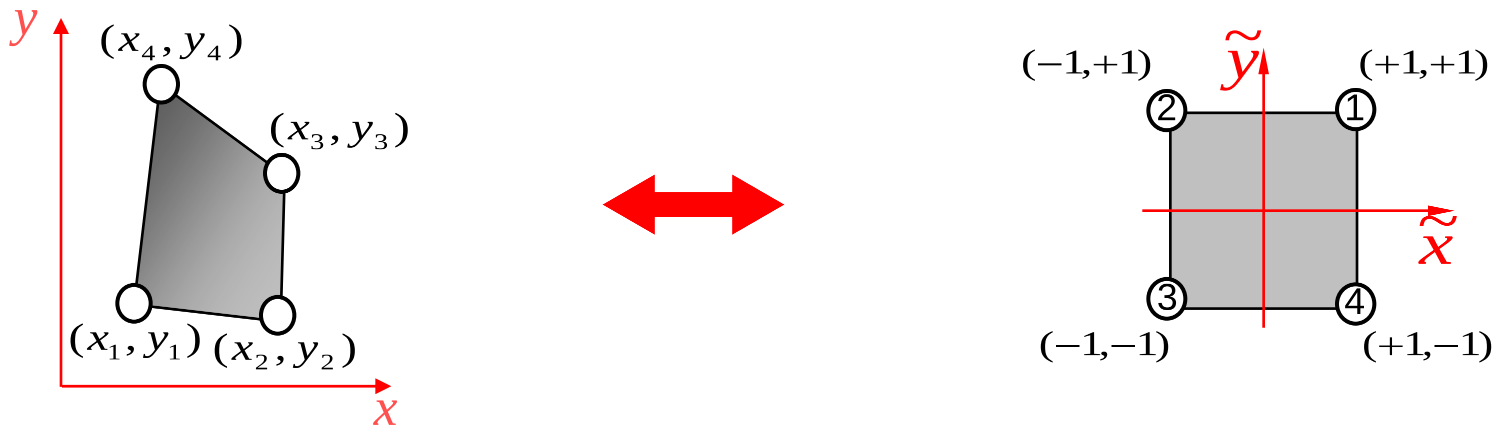
$$\sigma_{xy} = \frac{E}{(1+v)}\,\varepsilon_{xy}$$

• izoparametrični 2D KE

• interpolacija geometrije KE

$$x = x(\tilde{x},\tilde{y}) = \sum_{j=1}^{N_v} x_j \; \tilde{\psi}_j(\tilde{x},\tilde{y})$$

$$y = y(\tilde{x},\tilde{y}) = \sum_{j=1}^{N_v} y_j \; \tilde{\psi}_j(\tilde{x},\tilde{y})$$



Kartezijev 2D koordinatni sistem

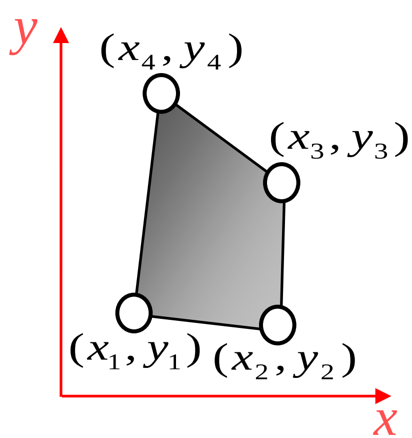
naravni koordinatni sistem

• interpolacija polja pomikov po območju KE

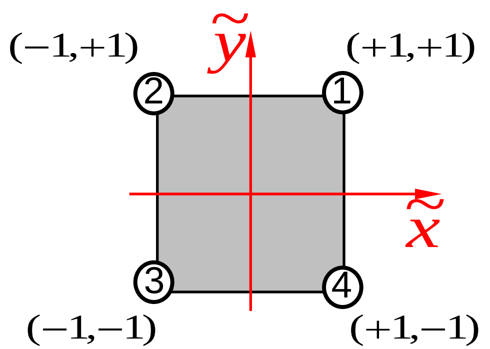
$$\{u\}_e = \{u_x, u_y\}^T$$

$$u_x(x,y) \approx \hat{u}_x(x,y) = \tilde{u}_x(\tilde{x},\tilde{y}) = \sum_{j=1}^{N_v} U_j^x \, \tilde{\psi}_j(\tilde{x},\tilde{y}) = \left\{U^x\right\}\{\tilde{\psi}\}$$

$$u_y(x,y) \approx \hat{u}_y(x,y) = \tilde{u}_y(\tilde{x},\tilde{y}) = \sum_{j=1}^{N_v} U_j^y \, \tilde{\psi}_j(\tilde{x},\tilde{y}) = \left\{U^y\right\}\{\tilde{\psi}\}$$



Kartezijev 2D koordinatni sistem



naravni koordinatni sistem

- matrični zapis enačbe KE za linearno elastični statično obremenjeni problem

- za posamezni KE dobimo toliko enačb, kolikor ima KE prostostnih stopenj
- v vozlišču KE sta neznani dve primarni veličini – pomika, tako da ima posamezni KE $(2*N_v)$ prostostnih stopenj

$$[K]_e \{U\}_e = \{F\}_e$$

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & \cdots & K_{1(2N_v)} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & \cdots & K_{2(2N_v)} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & \cdots & K_{3(2N_v)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{(2N_v)1} & K_{(2N_v)2} & K_{(2N_v)3} & \cdots & K_{(2N_v)(2N_v)} \end{bmatrix}_e \begin{Bmatrix} U_{1x} \\ U_{1y} \\ U_{2x} \\ \vdots \\ U_{(2N_v)y} \end{Bmatrix}_e = \begin{Bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ F_{2x} \\ \vdots \\ F_{(2N_v)y} \end{Bmatrix}_e$$

- togostna matrika $[K]_\mathrm{e}$ se izračuna na sledeči način

$$[K]_\mathrm{e} = \int_{\Omega_\mathrm{e}} \left([L][N]\right)^T \, [E] \, \left([L][N]\right) h \, \mathrm{d}\Omega$$

$$\{u\}_\mathrm{e} = \begin{Bmatrix} u_\mathrm{x} \\ u_\mathrm{y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \{\psi\} & 0 \\ 0 & \{\psi\} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{U^\mathrm{x}\} \\ \{U^\mathrm{y}\} \end{Bmatrix} = [N]\{U\}_\mathrm{e}$$

$$[L] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y} & \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}$$

- posamezni element vektorja $\{F\}_{\mathrm{e}}$ predstavlja v vozlišču KE delujočo vektorsko komponento sile v smeri določene koordinatne osi

- v primeru, da je velikost vektorske komponente pomika v smeri določene koordinatne osi v vozlišču KE poznana, velikost točkovne mehanske obremenitve v tej smeri ni poznana

$$U_{\mathrm{ik}} = \checkmark \quad \Rightarrow \quad F_{\mathrm{ik}} = ? \,, \quad \mathrm{i} = 1,..,\mathrm{N_v} \;,\; \mathrm{k} = \mathrm{x},\mathrm{y}$$

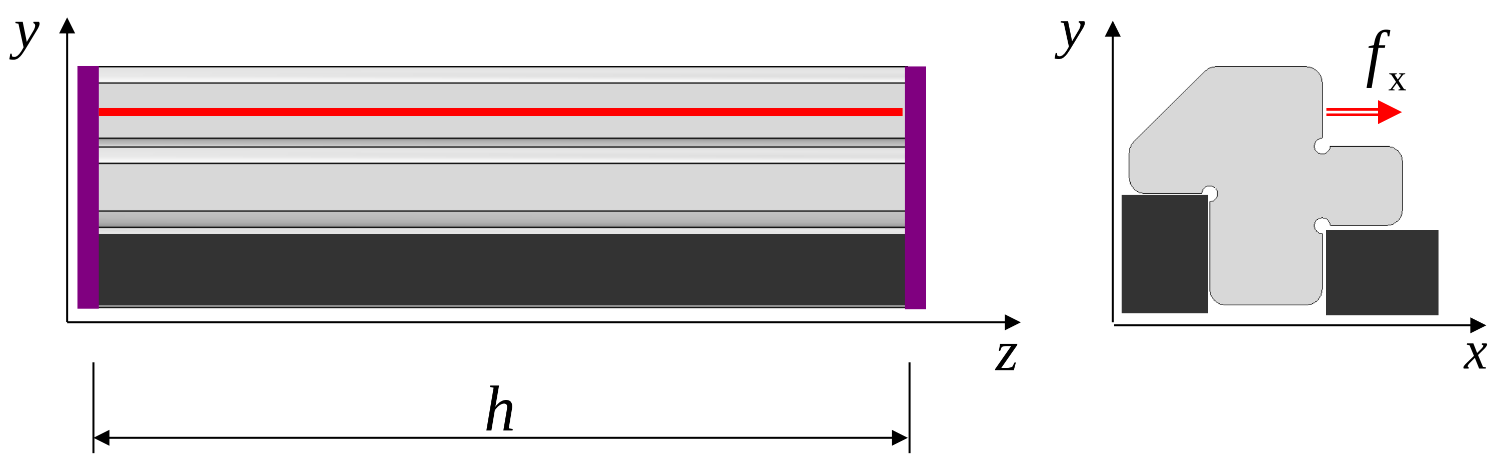
- pomik je lahko poznan samo v vozlišču KE, ki leži na ograji obravnavanega območja

- velikost točkovne obremenitve F_{k} predstavlja celotno silo po dolžini obravnavanega območja v smeri “z” koordinatne osi

$$F_{\mathrm{k}} = h\, f_{\mathrm{k}} \quad , \mathrm{k} = \mathrm{x}, \mathrm{y}$$

$$F_{\mathrm{k}} \ \ [\mathrm{N}]$$

$$f_{\mathrm{k}} \ \ [\mathrm{N/m}]$$



- v primeru, da <u>velikost komponente pomika</u> v smeri določene koordinatne osi v vozlišču KE <u>ni poznana</u>, je velikost točkovne mehanske obremenitve v tej smeri <u>možno izračunati</u>

$$U_{\mathrm{ik}} = ? \quad \Rightarrow \quad F_{\mathrm{ik}} = \checkmark \;, \quad \mathrm{i} = 1,..,\mathrm{N_v} \;, \; \mathrm{k} = \mathrm{r,z}$$

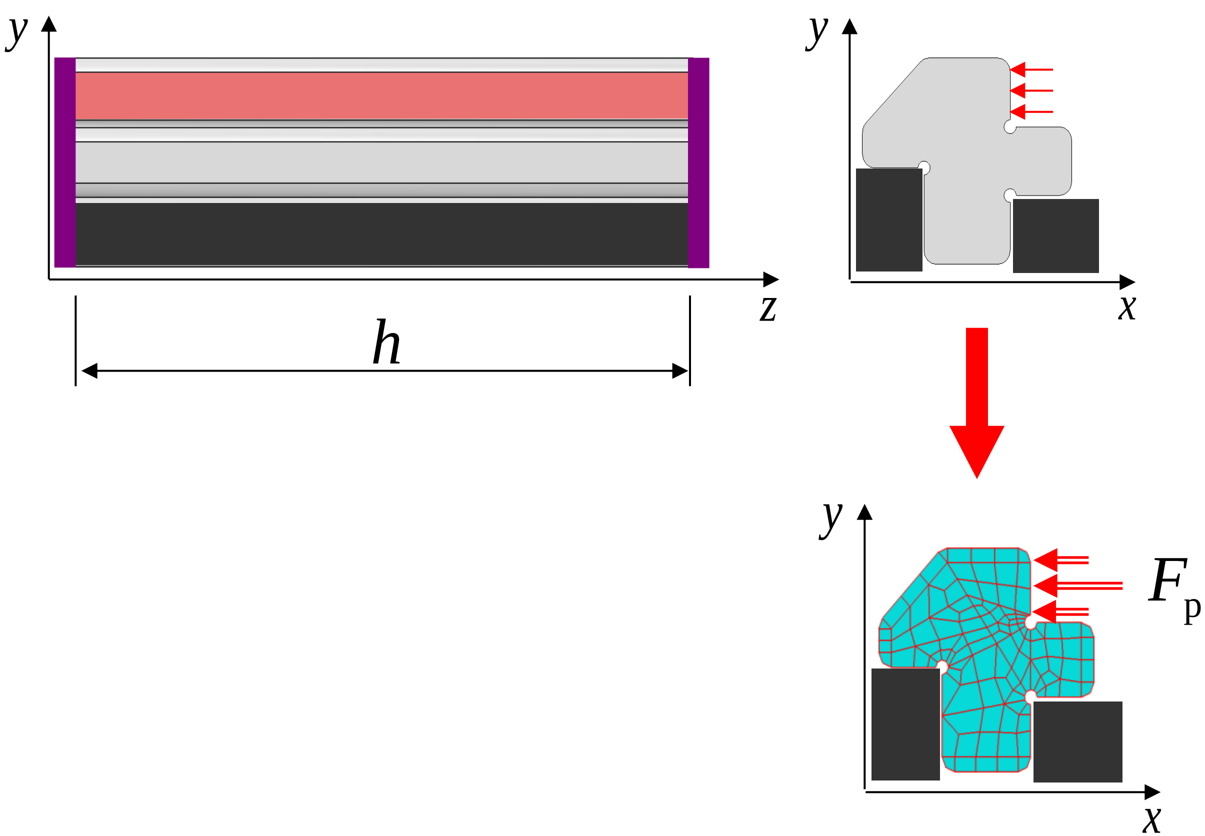
- v primeru <u>točkovne mehanske obremenitve</u> na ograji obravnavanega območja, mrežo KE generiramo tako, da točka, v kateri deluje točkovna obremenitev, sovpada z vozliščem KE

$$F_{\mathrm{Ik}} = F_{\mathrm{Tk}} \;, \quad \mathrm{I} = \{1,..,\mathrm{N_{KE}}\} \;, \; \mathrm{k} = \mathrm{x, y}$$

- točkovna obremenitev:
  - je vezana na <u>vozlišče</u> mreže KE in ne na posamezni KE
  - predstavlja celotno obremenitev po dolžini obravnavanega območja v smeri “z” koordinatne osi

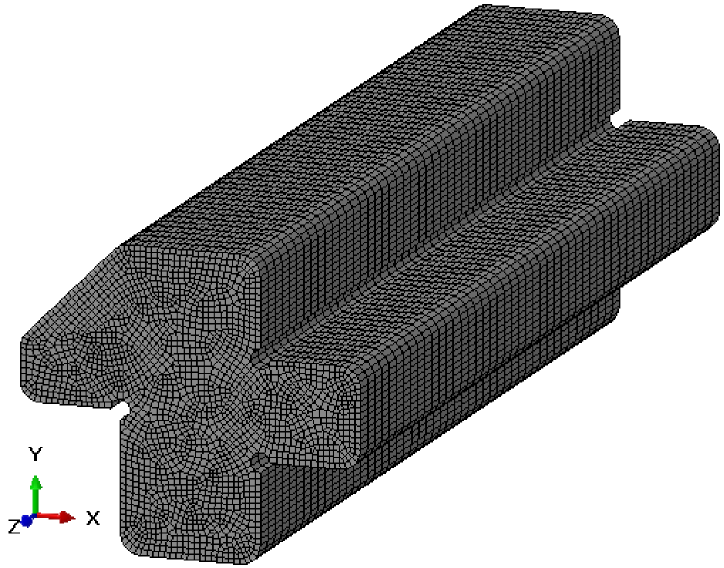
- v primeru ploskovno porazdeljene mehanske obremenitve na ograji obravnavanega območja, izračunamo ekvivalentne vozliščne sile za posamezni KE

$$\{F_\mathrm{p}\}_\mathrm{e} = \int_{\Gamma_\mathrm{e}} p[N]^T h \,\mathrm{d}\Gamma$$

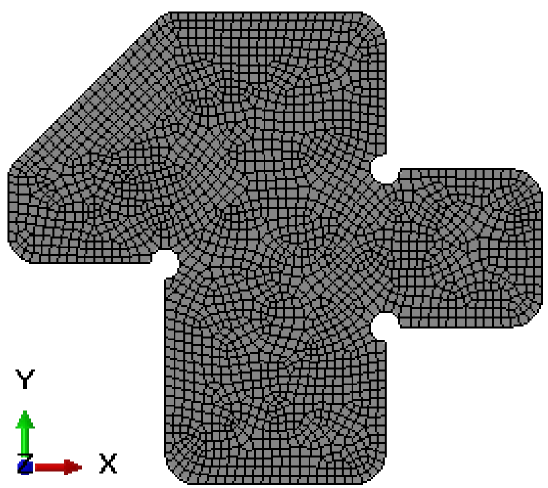


• primer reševanja <u>ravninsko napetostnega</u> mehanskega problema z MKE

<u>3D KE:</u>
104000 KE (6 pl., 8 vozl.)
112000 vozlišč
336000 enačb

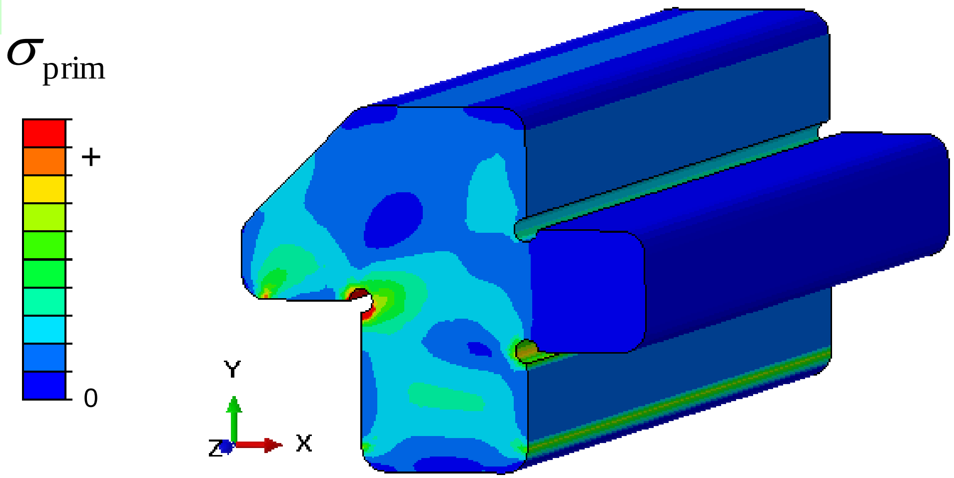


<u>2D ravn. def. KE:</u>
2100 KE (4 str., 4 vozl.)
2200 vozlišč
4400 enačb



- primerjava Mises-ove primerjalne napetosti: 3D KE ⟷ 2D ravn. def. KE

3D KE



2D KE